الجمهورية العراقية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

مقدمة في
نظرية البيانات

الدكتور علي عزيز علي

– المحتويات –

الفصل الثالث : الاشجار

الفصل الرابع : البيانات المستوية

الفصل الخامس : تلوين البيانات

– مقدمة –

بتكليف من وزارة التعليم العالي والبحث العلمي . قمت بتأليف هذا الكتاب وفق مقررات موضوع « نظرية البيانات » الذي يدرس لطلبة المرحلة الرابعة في الرياضيات .ولقد راعيت في تأليفه الدقة العلمية والتسلسل المنطقي والموضوعي والشرح المبسط .كما اكثرت من ايراد الامثلة المحلولة والتمارين المتنوعة .

ان هذا الكتاب هو اول كتاب عربي في موضوع نظرية البيانات . وهو مقدمة متواضعة في نظرية البيانات وبعض تطبيقاتها .ولقد صادفتني عند تأليفي الكتاب مشكلة تعريب المصطلحات العلمية . فكثير مما يتعلق منها بنظرية البيانات لم يرد في الكتب المعربة في مواضيع الرياضيات الاخرى .ولقد حاولت جهد امكاني اختيار الكلمة العربية المناسبة التي تعبر عن المعنى العلمي بالدرجة الاولى .وفي هذا المجال ، أرحب بملاحظات زملائي التدريسيين الاختصاصيين للاخذ بها في الطبعات القادمة ان شاء الله .

يمكنني القول بأن نظرية البيانات هي من المواضيع الاولية الرائعة في الرياضيات الحديثة . اذ ان هذه النظرية تُستعمل في معظم فروع المعرفة . فهي تخدمنا باعتبارها نموذجا رياضياً مبسطاً لاي نظام متضمن عملية ثنائية .

دُرست نظرية البيانات لاول مرة باعتبارها مفهوماً في الرياضيات من قبل عالم الرياضيات المعروف اويلر في عام 1736 .ولقد شهد القرن الحالي تطوراً كبيراً في نظرية البيانات . وتَفَتَّح هذا التطور في العشرين سنة الاخيرة عن تطبيقات واستعمالات ذات فوائد كبيرة في مواضيع ذات اهمية علمية واقتصادية كبيرة . كنظرية المباريات والبرمجة الرياضية . ونظرية الاتصالات . وشبكات الجريان . والشبكات الكهربائية اضافة الى استعمالاتها في الفيزياء . والكيمياء العضوية . والاقتصاد . والهندسة المدنية . وعلوم الحياة . وعلم النفس . ومجالات اخرى كثيرة ومتنوعة .وقد تطرقت الى عدد من تلك التطبيقات في الفصل السادس . وأشرت الى عدد آخر منها في الفصول الاخرى .

يتألف الكتاب من سبعة فصول .انصبت الفصول الخمسة الاولى على شرح الجانب النظري والرياضي لنظرية البيانات .وبذلك تعتبر مقدمة جيدة للموضوع .

امـا الفصل السادس فقد تضمن بعض تطبيقات البيانات ،كماسبق ان ذكرت . واخيرا فان الفصل السابع يوضح العلاقة بين مبرهنة هول من جهة ونظريـة المستـعرض والمستطيلات اللاتينية من جهة اخرى .

بعض فقرات فصول هذا الكتاب ذات مستوى عالٍ ، كما ان براهين بعض المبرهنات مطولة ومملة للطالب المبتدىء في نظرية البيانات.وبما ان المادة التي يحتويها الكتاب اكثر مما يمكن تغطيته في فصل دراسي واحد (كما أرى) ، فاني اقترح في هذه الحالة تجنب تدريس تلك البنود او اجزاء البنود المؤشرة بالعلامة ✽ وعدم اعطاء براهين تلك المبرهنات أوحل مجاميع التمارين التي وضعت عليها هذه العلامة او المحصورة بين علامتين من هذا النوع . علما بان ترك المواد المؤشرة هذه لن يؤثر في إعتماد الفقرات المتبقية بعضها على بعض .

هذا واقدم شكري وتقديري الى الخبير العلمي الدكتور عادل غسان نعوم الذي بذل جهداً مخلصاً في مراجعة مسودات الكتاب وابدى ملاحظات ثمينة ساعدتني على تنقيح بعض الفقرات واضافة امثلة مفيدة . كما اشكر الخبير اللغوي الدكـتور عبد الكريم توفيق لقيامه بضبط لغة الكتاب . وأقدر الجهد الكبير الذي بذله العاملون في مؤسسة دار الكتب بجامعة الموصل لاجل أن يظهر هذا الكتاب بشكله الحالي .

واخيراً آمل ان اكون قد وفقت في خدمة وطني وأمتي باثراء المكتبة العربيـة . والله من وراء القصد .

المؤلف

الموصل / ١٩٨٣

الفصل الاول

مفاهيم أساسية

(1 - 1) تعاريف

نقدم في هذا البند العديد من التعاريف والامثلة على البيانات . وسوف نذكر انواعاً متعددة من البيانات .

يعرف البيان G بانه مجموعة غير خالية V من عناصر تسمى رؤوس (vertices) البيان . مع عائلة (أو جملة family) E من أزواج غير مرتبة من رؤوس البيان. يطلق على كل عنصر من عناصر E حافة أو ضلع (edge) . ويطلق على V مجموعة رؤوس البيان G . وقد نرمز لها احيانا بـ $V(G)$. كما يطلق على E عائلة حافات G . وقد نرمز لها احياناً بـ $E(G)$. ونعبر احياناً عن البيان G الذي مجموعة رؤوسه V وعائلة حافاته E بالزوج المرتب (V, E) . وسوف نرمزلكل حافة بحرف . مثل e مع دليل يوضع اسفل الحرف . واذا كانت الحافة e هي الزوج غير المرتب للرأسين u و v فانه يمكننا ان نكتب $e = [u, v]$ أو $e = [v, u]$. وذلك لاهمال الترتيب . وعندئذ نقول ان كلاً من u و v هورأس للحافة e . وان e هي حافة تصل الرأسين u و v .

نستنتج من التعريف الذي اعطيناه للبيان هنا . انه من الممكن ان يحتوي البيان على أكثر من حافة واحدة تصل نفس الرأسين . كما انه من الممكن ان يكون للبيان حافة تصل رأساً بنفسه . يطلق على مثل هذه الحافة لفة (loop) . ويقال أيضاً إن الرأسين u و v متجاوران (adjacent) إذا كان $[u, v]$ حافة . كما نقول عندئذ ان كلا من u و v واقع على (incident with) الحافة $e = [u, v]$. ونقول أيضاً ان الحافة e واقعة على كل من الراسين u و v . ويقال للحافتين $e_1 = [u, v]$ و $e_2 = [u, w]$ انهما متجاورتان .

يطلق على الرأس الذي لايقع على أية حافة رأساً منعزلاً (isolated) .

مثال (1) : لتكن $V = \{ v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 \}$ مجموعة رؤوس بيان ، ولتكن

$$E = ([v_1, v_2], [v_1, v_3] , [v_1 , v_2] , [v_1, v_4] , [v_2 , v_3] , [v_2 , v_1] , [v_2, v_3] , [v_4 , v_4])$$

عائلة حافاته ، عندئذ نجد ان البيان $G = (V, E)$ يتكون من خمسة رؤوس وثمان حافات ، وأن هنالك ثلاث حافات تصل الرأسين v_1 و v_2 ، وان هنالك حافتين تصلان الرأسين v_2 و v_3 . كما نلاحظ أن الرأس v_5 لايقع على أية حافة،فهو بذلك رأس منعزل . كما أن الحافتين $[v_1 , v_2]$ و $[v_1 , v_4]$ متجاورتان ، وان الرأسين v_3 و v_4 غير متجاورين .

يقال ان هنالك حافة مضاعفة (multiple edge) بين الراسين u و v في G اذا كان هنالك اكثر من حافة واحدة تصل u و v ، أي ان $[u, v]$ مكرر اكثر من مرة واحدة في عائلة الحافات $E (G)$.كما يقال لبيان G انه بيان مضاعف (multigraph) اذا احتوى على حافة مضاعفة .

وهكذا ،فان تعريفنا للبيان هو تعريف عام يشمل البيان المضاعف .

يقال لبيان G انه بيان – p اذا كان عدد تكرار كل زوج غير مرتب من رأسين في $E (G)$ لايزيد على p . فالبيان في المثال (1) هو بيان -3 لان الزوج غير المرتب $[v_1, v_2]$ مكرر ثلاث مرات ، $[v_1, v_3]$ مكرر مرة واحدة ، $[v_1, v_4]$ يظهر مرة واحدة، $[v_2, v_3]$ يظهر مرتين ، و $[v_4, v_4]$ يظهر مرة واحدة .

يعرف البيان البسيط (simple graph) بانه بيان – 1 خال من اللفات .
فالبيان G ، حيث

$$V (G) = \{ v_1, v_2 , v_3 , v_4 \},$$

$$E (G) = \{ [v_1, v_2] , [v_2, v_3] , [v_3, v_1] , [v_2, v_4] , [v_3 , v_4] ,$$

هو بيان بسيط. لاحظ ان لكل بيان بسيط G . تكون E(G) مجموعة لعدم تكرار اي عنصر فيها .

تعرف رتبة (order) بيان G بانها عدد رؤوسه . اي أن رتبة G هي عدد العناصر في مجموعة الرؤوس V(G) عندما تكون منتهية .

يقال ان G بيان منتهٍ (finite graph) اذا كان عدد حافاته عدداً منتهيا كما يقال انه غير منتهٍ (infinite) اذا كانت E (G) عائلة غير منتهية . نستنتج من هذا التعريف انه يمكن ان يحتوي بيان منتهٍ على عدد غير منتهٍ من الرؤوس .

فالبيان $G = (V, E)$. حيث

$V = \{ v_1 , v_2 , v_3 , ... \}$,

$E = \{ [v_1 , v_2] , [v_1 , v_3] , [v_2 , v_3] , [v_2 , v_2] \}$,

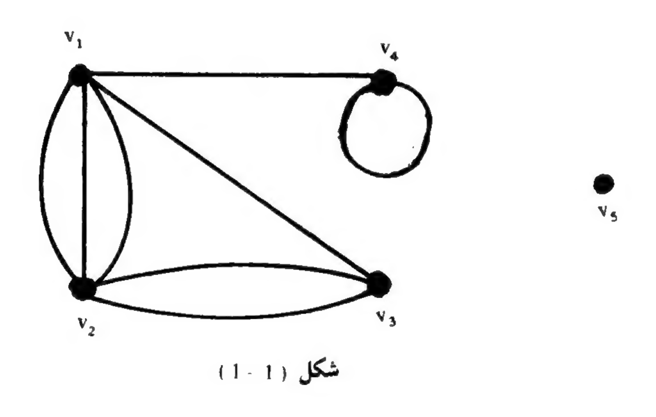
هو بيان منتهٍ بالرغم من ان المجموعة V غير منتهية . لاحظ في هذا المثال ان الرؤوس $v_4 , v_5 , ...$ هي رؤوس منعزلة . وعلى كل حال . فان الوضع الطبيعي هو ان في كل بيان منته تكون مجموعة رؤوسه منتهية ايضاً . وذلك لان الرؤوس المنعزلة تكون قليلة التأثير في دراسة البيانات . وبما أن معظم دراستنا في هذا الكتاب هي للبيانات المنتهية التي مجموعة رؤوسها منتهية . وعليه سوف نفترض في هذا الكتاب أن كل بيان منته له عدد منته من الرؤوس . الا اذا اشير صراحة الى خلاف ذلك .

ونريد أن نشير هنا الى أنه لايوجد إتفاق تام على المفاهيم والمصطلحات في نظرية البيانات . فبينما يستعمل بعض المؤلفين العنصرين الاساسين رأس – حافة . يستعمل آخرون نقطة – خط (point - line) . ويستعمل آخرون عقدة – قوس (node - arc) وقد يستعمل احياناً مبسط 0 (0 Simplex) بدلا من رأس . ومبسط 1 - (1 Simplex) بدلاً من حافة . وهكذا الحال لكثير من مفاهيم ومصطلحات نظرية البيانات . ولقد حاولنا في هذا الكتاب اتباع المصطلحات الكثيرة الشيوع والقليلة التعقيد التي تفي بالغرض الذي من أجله وضع هذا الكتاب .

ملاحظة : سوف نفترض ان كافة البيانات التي تعترضنا في هذا الكتاب هي بيانات منتهية الآ اذا أشرنا صراحة الى خلاف ذلك .

البيانات التي تكلمنا عليها لحد الآن هي . في الواقع ، بيانات غيرموجهة (undirected graphs) . كما تسمى احياناً . ويظهرسبب هذه التسمية من تمثيل البيانات هندسياً كما مبين فيما يلي .

ليكن $G = (V, E)$ بياناً . لتمثيل G هندسياً في المستوي أوفي الفراغ . نعين لكل رأس دائرة صغيرة صلدة وفي اي موقع كيفي ، واذا كانت $e = [u, v]$ حافة في G فاننا نصل الدائرة التي تمثل الرأس u مع الدائرة التي تمثل الرأس v بخط متصل بسيط (اي لايقطع نفسه) مستقيم أومقوس . وهكذا . فان كل حافة في G تقابل خطاً واحداً وواحداً فقط في التمثيل الهندسي لـ G . لاحظ انه لاأهمية لطول الخط أوشكله . وأنما المهم هووجود اوعدم وجود ذلك الخط بين رأسين معينين . ولتوضيح ذلك رسمنافي شكل (1 - 1) البيان المعطى في المثال (1)



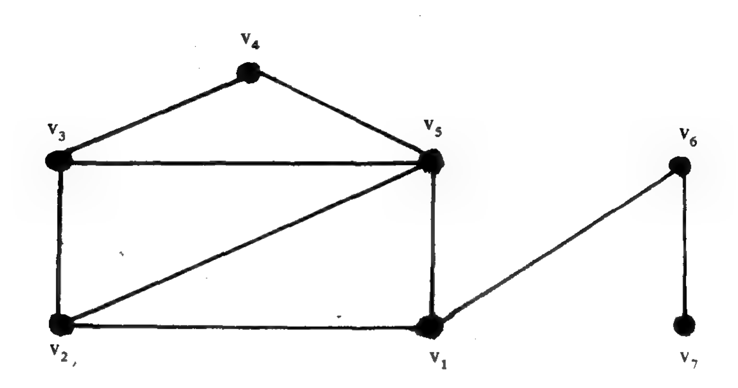
شكل (1 - 1)

لاحظ ان الخطوط التي تمثل حافات مختلفة يمكن ان تقاطع بعضها في المستوي .

واضح انه يمكن رسم أي بيان اذا أعطيت مجموعة رؤوسه وعائلة حافاته . كأزواج غيرمرتبة ، كما يمكن ايجاد مجموعة الرؤوس وعائلة الحافات اذا أعطي التمثيل الهندسي للبيان . لذلك . فان هنالك تقابلاً بين البيانات وتمثيلاتها الهندسية . عليه . يمكن التعبيرعن بيان G اما بذكرعناصرمجموعة رؤسه وعائلة حافاته . أوبرسمه هندسيا بالطريقة التي ذكرناها . وسوف نستخدم أي منهما حسب الحاجة وبالشكل الذي نجده مناسباً لنا .

ان التمثيل الهندسي يوضح في كثير من الاحيان التعاريف والمفاهيم ويفسر براهين بعض القضايا ويساعدنا على فهمها .

مثال (2) : ليكن G البيان المرسوم في شكل (1 - 2) .



شكل (1 - 2)

عندئذ يكون

$$V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \},$$

$$E(G) = \{ [v_1, v_2], [v_1, v_5], [v_1, v_6], [v_2, v_3], [v_2, v_5],$$

$$[v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5], [v_6, v_7] \}.$$

بنظرة واحدة على الرسم نستنتج ان هذا البيان هو بيان بسيط .

تعرف درجة (degree) اي رأس v في بيان G بانها عدد الحافات الواقعة على v . مع احتساب كل لفة مرتين . ويرمز لدرجة v بالرمز $\rho(v)$. فمثلاً . في البيان المعطى في الشكل (1 - 1) . نجد أن

$$\rho(v_1) = 5, \quad \rho(v_2) = 5, \quad \rho(v_3) = 3, \quad \rho(v_4) = 3, \quad \rho(v_5) = 0.$$

مبرهنة (1 - 1) : اذا كان $G = (V, E)$ بياناً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m . فان مجوع درجات جميع رؤوسه يساوي 2m . أي أن

$$\sum_{v \varepsilon V} \rho(v) = 2m.$$

البرهان: بما أن كل حافة تقع بالضبط على رأسين (مختلفين أو متساويين)، فان كل حافة تساهم بالضبط بـ2 في مجموع درجات جميع رؤوس G . وبذلك فان مجموع درجات الرؤوس كلها يساوي ضعف عدد الحافات.

وتوضيحاً لهذه المبرهنة، نلاحظ بالنسبة للبيان في شكل (1 - 1) أن

$$\sum_{v \varepsilon V} \rho(v) = 5 + 5 + 3 + 3 + 0 = 16 = 2(8) = 2m.$$

يطلق على المبرهنة (1 - 1)، التي كانت معروفة لعالم الرياضيات المشهور أويلر (Euler) منذ زمن بعيد، مأخوذة المصافحة (handshaking lemma) . وذلك لانها تعني أنه اذا تصافح عدد من الاشخاص فان مجموع مصافحات جميع الايدي لهؤلاء الأشخاص يجب ان يكون عدداً زوجياً؛ ويعود السبب الى ان في كل مصافحة تُستخدم يدان فقط لشخصين مختلفين.

نتيجة (1 - 1) : عدد الرؤوس الفردية الدرجة في أي بيان G هو عدد فردي.
يتبع البرهان مباشرة من المبرهنة (1 - 1) ويترك تمرينا للطالب.
نختم هذا البند بالتعريف المهم الآتي.
يقال ان البيانين

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ و } G_2 = (V_2, E_2)$$

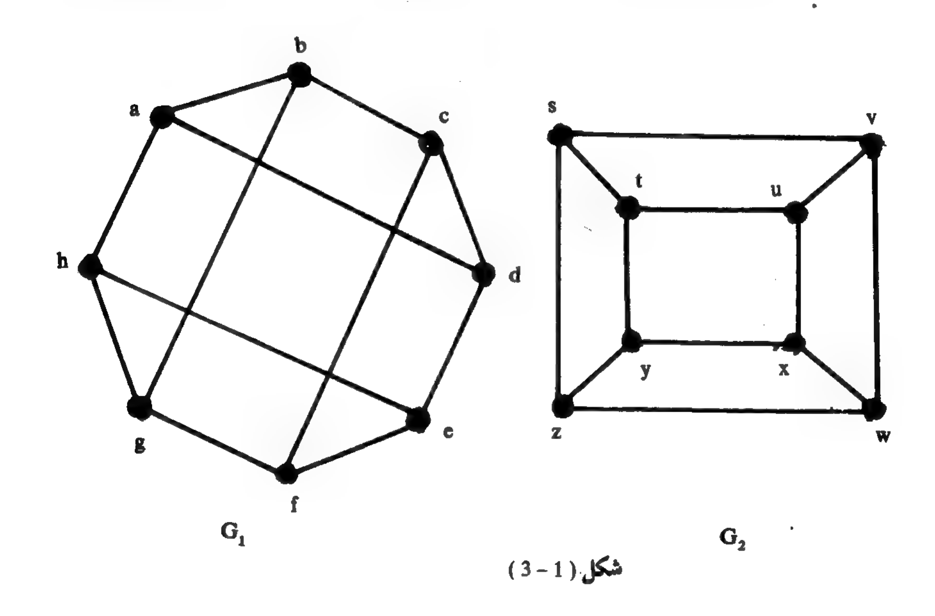
متشاكلان (isomorphic) اذا وجد تقابل متباين بين V_1 و V_2 بحيث ان لكل رأسين v و u في G_1 يكون عدد الحافات التي تصل v و u مساوياً لعدد الحافات التي تصل الرأسين v′ و u′ في G_2 المقابلين لـ v و u على الترتيب.

مثال (3) : تأمل البيانين G_1 و G_2 في شكل (1 - 3)، تجد أن التقابل الأتي بين $V(G_1)$ و $V(G_2)$:

$a \longleftrightarrow s, b \longleftrightarrow t, c \longleftrightarrow u, d \longleftrightarrow v, e \longleftrightarrow w, f \longleftrightarrow x, g \longleftrightarrow y, h \longleftrightarrow z$

يحقق الخاصية: اذا كان الرأسان في G_1 متجاورين، فان الرأسين المقابلين لهما في G_2 متجاوران أيضاً. ونظراً لأن كل من G_1 و G_2 بيان بسيط، فان G_1 و G_2 متشاكلان.

واضح أن علاقة التشاكل على البيانات هي علاقة تكافؤ؛ فكل بيان متشاكل مع نفسه، واذا كان G_1 متشاكلاً مع G_2 وكان G_2 متشاكلاً مع G_3 فان G_1 متشاكل مع G_3



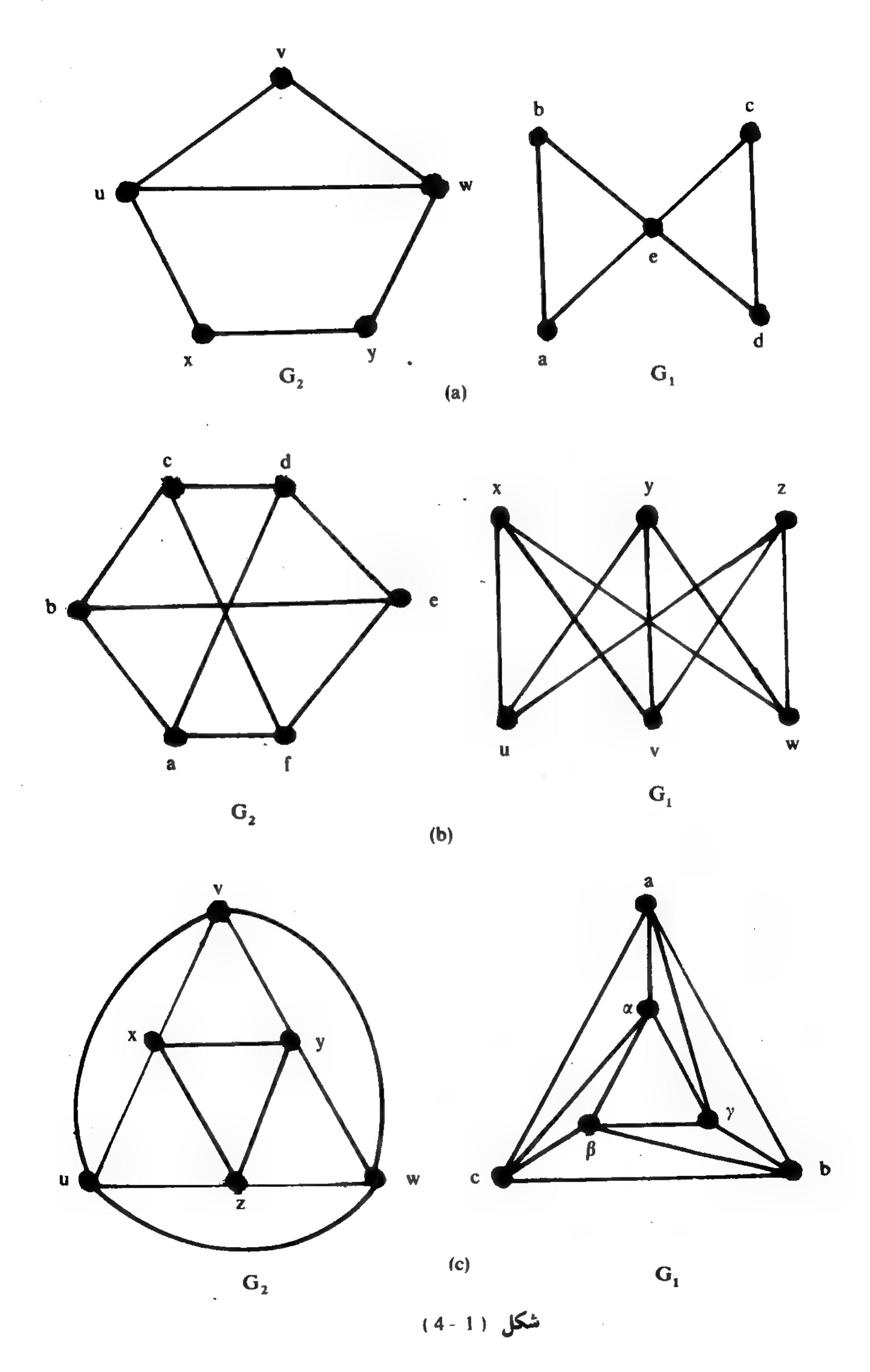
شكل (1 - 3)

تمارين (1 - 1)

(1) إثبت نتيجة (1 - 1).

(2) هل البيانان G_1 و G_2 المعطيان في كل من (a)، (b)، و (c) في شكل (1 - 4) متشاكلان أو غير متشاكلين؟ بين ذلك.

(3) لتكن $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ مجموعة رؤوس بيان - G، فاذا علمت ان الراسين v_i و v_j متجاوران اذا واذا فقط $i \equiv j \pmod 3$ لكل $i, j = 1,2, \ldots, 8$، فجد حافات G وارسمه. وهل أن G بيان بسيط؟ ولماذا؟



شکل (4 - 1)

(4) لتكن $V = \{ v_1 , v_2 , \ldots , v_7 \}$ مجموعة رؤوس بيان بسيط G . فاذا علمت ان $[v_i , v_j]$ حافة في G إذا وإذا فقط كان العددان i و j أوليين مع بعضهما فجد حافات G وأرسمه.

(5) إثبت ان هنالك بالضبط أربعة بيانات بسيطة ، غيرمتشاكلة مثنى مثنى ، بثلاثة رؤوس ، وان هنالك أحد عشر بياناً بسيطاً باربعة رؤوس.

(6) اذا كان G بياناً بسيطاً برتبة n ، $n \geq 2$ فبرهن على أن G يحتوي على رأسين بنفس الدرجة.[تلميح : لأحظ أن $\rho (v) \leq n - 1$]

(7) ليكن G بياناً بسيطاً برتبة n . إثبت أن عدد حافات G لايزيد على

$$\frac{1}{2} n (n - 1)$$

(1 - 2) البيانات الموجهة (Directed Graphs)

يطلق أحيانا على البيانات التي شُرحت في البند السابق بيانات غير موجهة ، ولقد أصطلحنا على تسميتها في هذا الكتاب «بيانات» وذلك لان معظم مواد هذا الكتاب سوف تكون عنها. وقد خصصنا هذا البند لتقديم شرح أولي موجزعن البيانات الموجهة.

يعرف البيان الموجه. D . بانه مجموعة V غير خالية من عناصر تسمى الرؤوس. مع عائلة A من أزواج مرتبة من الرؤوس. يطلق على كل زوج مرتب (u, v) . حيث $u, v \varepsilon V$ حافة موجهة (directed edge) أوقوس (arc) . ويعبر عن البيان الموجه D كزوج مرتب (V , A) ، ويرمز أحياناً لمجموعة رؤوس D ب V(D) ، ولعائلة الحافات الموجهة ب A (D) . ويطلق على حافة موجهة(u, u) في بيان موجه D إسم لفة موجهة.

يقال لبيان موجه D = (V, A) أنه بيان موجه - pإذا لم يتكرر أي عنصرمن عناصر V × V اكثر من p من المرات في عائلة الحافات الموجهة A . ويقال لـ D أنه بيان موجه بسيط اذا كان D بياناً موجهاً -1وليس فيه لفات موجهة.

اذا كانت(e = (u, v حافة موجهة. فانه يطلق على u رأس الابتداء (initial vertex) ويطلق على v رأس الأنتهاء (terminal vertex) للحافة الموجهة e ، كما نقول أن e تصل من u الى v. وان كلاً من u وvيقع علىe.

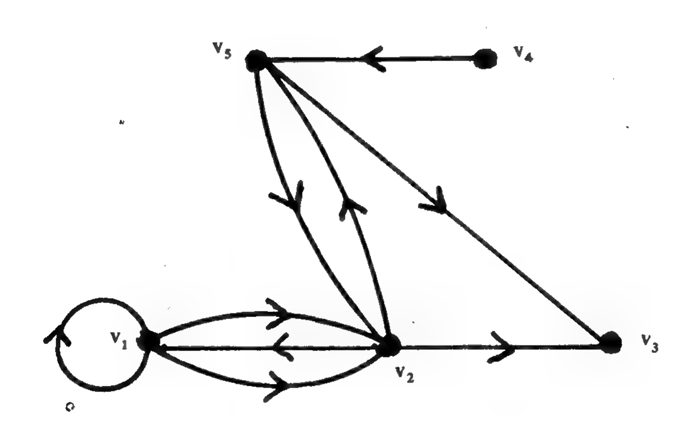
يُمثل اي بيان موجه $D = (V, A)$ هندسياً في المستوي أو في الفراغ برسم دائرة صغيرة صلدة لكل رأس في D ، واذا كانت (u, v) حافة موجهة فيرسم خط بسيط متصل عليه سهم يتجه من الرأس u الى الرأس v.

<u>مثال (1)</u> : تأمل البيان الموجه $D = (V, A)$ ، حيث أن

$$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$$

$$A = \{ (v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_2), (v_5, v_3) \}.$$

لقد رسم التمثيل الهندسي لـ D في شكل (1 – 5) لاحظ ان هذا البيان D هو بيان موجه – 2 ، وأن فيه لفة موجهة عند الرأس v_1.



شكل (1 - 5)

اذا كان الرأس u هو رأس الابتداء للحافة الموجهة e التي هي ليست لفة موجهة. فانه يُقال ان e تخرج من الرأس u ، وأذا كان v هو رأس الانتهاء لـ e التي هي ليست لفة موجهة. فيقال ان e تدخل الى الرأس v .

اذا كان u رأساً في بيان موجه D ، فاننا نعرف شبه- الدرجة الخارجية (outer demi –degree) لـ u ، التي يرمز لها $\rho^{+}(u)$ ، بانها عدد اللفات الموجهة الواقعة على u زائداً عدد الحافات الموجهة الخارجة من u. كما أننا نعرف شبه- الدرجة الداخلية (inner demi – degree) لـ u ، التي يرمز لها $\rho^{-}(u)$ ، بانها عدد اللفات الموجهة الواقعة على u زائداً عدد الحافات الموجهة الداخلة الى u. وأخيراً ، نعرف درجة u ، التي يرمز لها $\rho(u)$ ، بـ

$$\rho(u) = \rho^{+}(u) + \rho^{-}(u).$$

فمثلاً ، في البيان المعطى في المثال (1) ، نجد

$$\rho^{+}(v_1) = 3 \quad , \quad \rho^{-}(v_1) = 2 \quad , \quad \rho(v_1) = 5 \quad ;$$

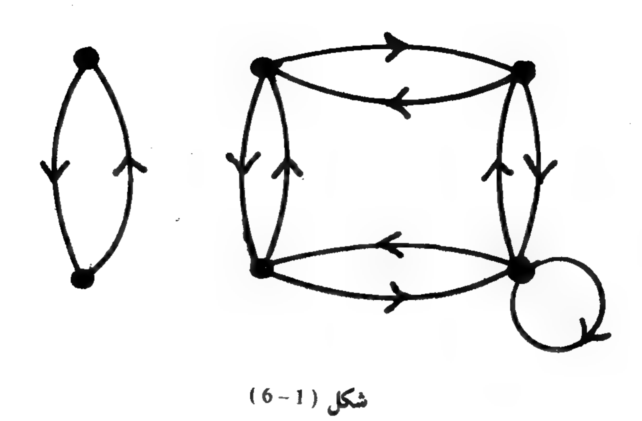
$$\rho^{+}(v_3) = 0 \quad , \quad \rho^{-}(v_3) = 2 \quad , \quad \rho(v_3) = 2 \quad .$$

ملاحظة : قد يستنتج القاريء أن هنالك نظرية للبيانات غير الموجهة . ونظرية للبيانات الموجهة . هذا في الواقع غير صحيح . فالنتائج للبيانات الموجهة يمكن ان تطبق على البيانات غير الموجهة . وذلك بابدال كل حافة غير موجهة [u , v] بحافتين موجهتين (u , v) و (v , u) . وبالمثل . النتائج للبيانات غير الموجهة يمكن ان تطبق على البيانات الموجهة . وذلك بمجرد إهمال الاتجاه لكل حافة موجهة ويمكن للقاريء أن يتأكد من صحة ذلك بالنسبة لمفهوم « الدرجة» .

يقال لبيان موجه D أنه متناظر (symmetric) اذا كان لكل رأسين u و v يكون عدد الحافات الموجهة من u الى v مساوياً لعدد الحافات الموجهة من v الى u. وعندما يكون D = (V , A) بياناً موجهاً - 1. فانه يكون متناظراً اذا واذا فقط .

$$(u, v) \varepsilon A \Rightarrow (v, u) \varepsilon A .$$

فالبيان الموجه المعطى في شكل (1 – 6) هو بيان موجه متناظر . أما البيان الموجه المعطى في شكل (1 – 5) فهو غير متناظر.

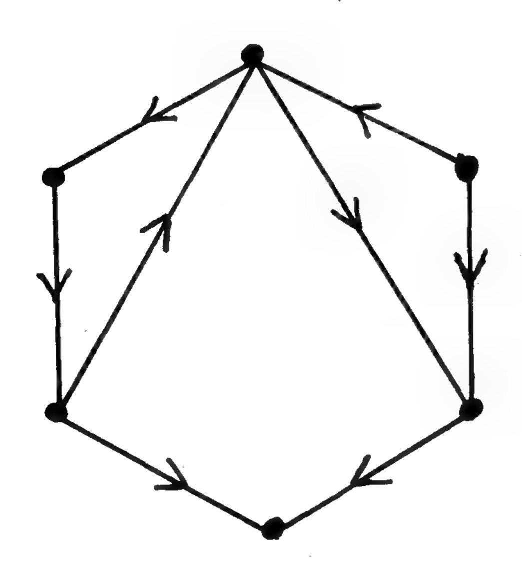


شكل (1 - 6)

يقال لبيان موجه D انه لاتناظري (anti -symmetric) إذا كان، لكل رأسين u و v، عدد الحافات الموجهة من u الى v زائداً عدد الحافات الموجهة من v الى u لايزيد على 1. فعندما يكون D = (V , A) بياناً موجهاً-1 ، فانه يكون لاتناظرياً اذا واذا فقط

$$(u,v) \varepsilon A \Rightarrow (v,u) \notin A$$

لاحظ ان كل بيان لاتناظري لايحتوي مطلقاً على لفة موجهة. البيان المعطى في شكل (1 - 7) هو بيان لاتناظري.

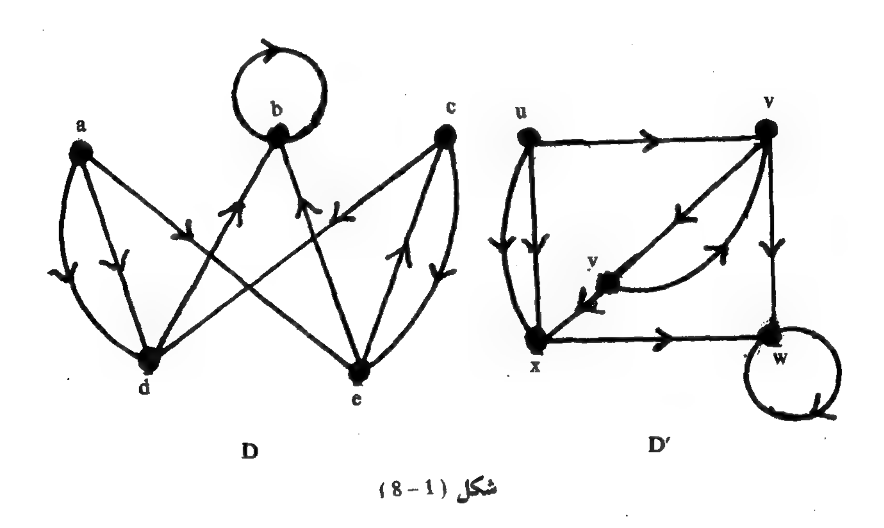


شكل (1 - 7)

على القاريء أن يلاحظ أن هنالك فرقا كبيرا بين بيان غير متناظر وبيان لاتناظري؛ فكل بيان لاتناظري هو بيان غير متناظر، ولكن العكس غير صحيح.

ليكن $D = (V, A)$ ، $D' = (V', A')$ بيانين موجهين. يقال إن D و D' **متشاكلان** اذا وجد تقابل متباين بين V ، V' بحيث ان لكل رأسين v ، u في V يكون عدد الحافات الموجهة من u الى v في D مساوياً لعدد الحافات الموجهة من u' الى v' في D' ، وكذلك عدد الحافات الموجهة من v الى u في D مساويا لعدد الحافات الموجهة من v' الى u' في $\overline{D}$ ، حيث أن u' يقابل u و v يقابل v' فمثلاً، البيانان الموجهان المعطيان في شكل (1-8) متشاكلان وفق التقابل المتباين

$$a \longleftrightarrow u \ , \ b \longleftrightarrow w \ , \ c \longleftrightarrow y \ , \ d \longleftrightarrow x \ , \ e \longleftrightarrow v.$$



شكل (1 - 8)

تمارين (1 - 2)

(1) إعط مثالاً لبيان موجه متناظر، ولبيان موجه لاتناظري.

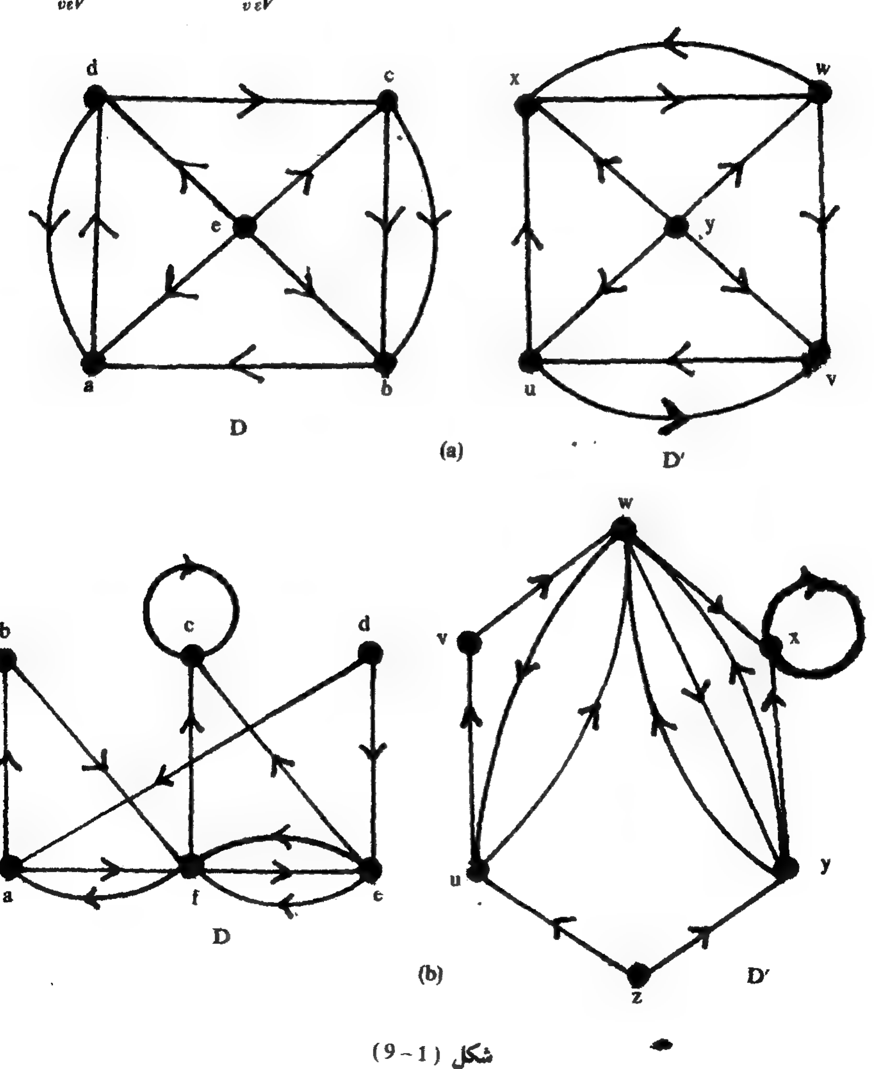
(2) جد شبه- الدرجة الداخلية وشبه- الدرجة الخارجية لكل رأس في البيان الموجه المعطى في شكل (1 - 6) ماذا تلاحظ؟

(3) إثبت أن لكل رأس v في بيان موجه متناظر يكون $\rho^{+}(v) = \rho^{-}(v)$

(4) لتكن $V = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_8 \}$ مجموعة رؤوس بيان موجه بسيط. جد مجموعة حافاته الموجهة A اذا علمت أن $(v_i , v_j) \varepsilon A$ اذا واذا فقط $i > j$. ارسم (V , A) . ماذا تلاحظ بالنسبة لدرجات رؤوس هذا البيان ؟ ماهي الخاصية الاخرى التي يتمتع بها هذا البيان ؟

(5) ليكن $D = (V , A)$ بياناً موجهاً عدد حافاته الموجهة هو m. إثبت أن

$$\sum_{v \varepsilon V} \rho^{+}(v) = \sum_{v \varepsilon V} \rho^{-}(v) = m .$$



شكل (1 - 9)

(6) بين أكان البيانات الموجهان D, D' المعطيان في كل من (a)، (b) من شكل (1 – 9) متشاكلين أم لا ؟

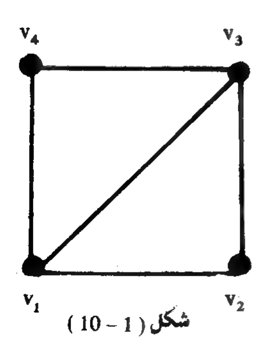
(*7) إثبت أن هنالك بالضبط 16 بياناً موجهاً بسيطاً بثلاثة رؤوس غير متشاكلة مثنى مثنى.

(1 – 3) البيانات الجزئية (Subgraphs)

يقال لبيان H انه بيان جزئي من البيان G اذا كانت مجموعة رؤوس H هي مجموعة جزئية من مجموعة رؤوس G ، وكانت كل حافة في H هي حافة في G . واذا كان H بيانا جزئيا من بيان G ، فاننا نعبر عن ذلك بـ $H \subset G$.

البيان التافه (null graph) هو بيان خال من الحافات ، اي ان عائلة حافاته خالية ، ويرمز للبيان التافه المكون من r من الرؤوس المنعزلة بـ N_r . يعتبر كل بيان تافه N_r بياناً جزئياً لكل بيان ذي رتبه لاتقل عن r . كما أن كل حافة لبيان G تعتبر بحد ذاتها بياناً جزئياً من البيان G . وبصورة عامة ، يمكن الحصول على كل البيانات الجزئية المختلفة (أي غير المتشاكلة مثنى مثنى) لبيان G وذلك بايجاد كل العوائل الجزئية المختلفة لـ $E(G)$ ؛ كل عائلة جزئية هي عائلة حافات لبيان جزئي من G .

ينطبق تعريف البيان الجزئي هذا على البيانات الجزئية الموجهة لبيان جزئي موجه . فاذا كان D بياناً موجهاً ، وكان H بياناً موجهاً بحيث أن $V(H) \subset V(G)$ وأن كل الحافات الموجهة لـ H هي حافات موجهة لـ D ، فعندئذ نقول أن H بيان جزئي موجه من البيان D .



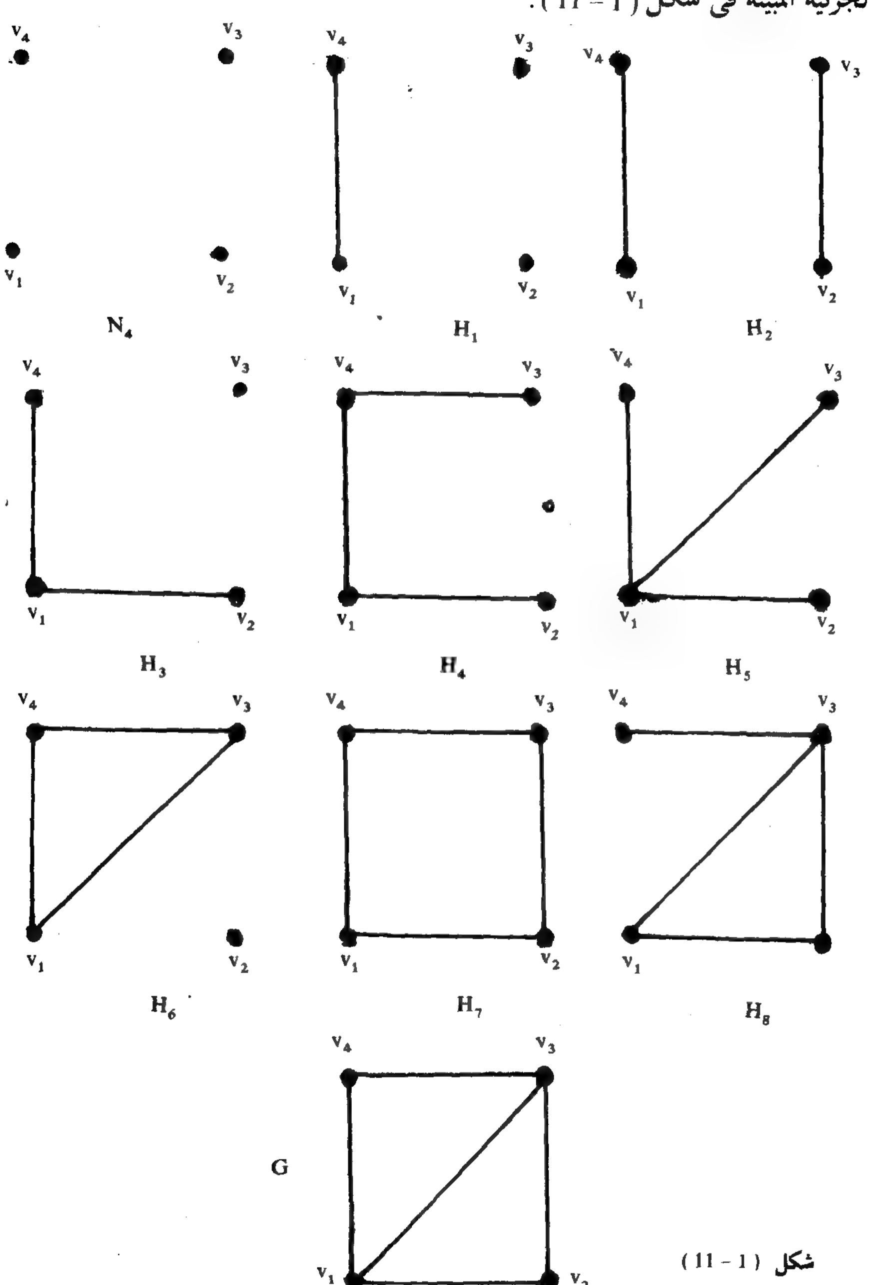
شكل (1 – 10)

لاحظ ان كل المفاهيم والقضايا التي سوف نذكرها في هذا البند تنطبق (بتعديل بسيط) على البيانات الموجهة .

مثال (1) : جد كل البيانات الجزئية المختلفة (بحدود التشاكل) للبيان المبين في شكل (1 – 10) التي مجموعة رؤوسها هي $V(G)$.

(*) التمارين التي عليها النجمة (*) تعتبر اصعب من غيرها.

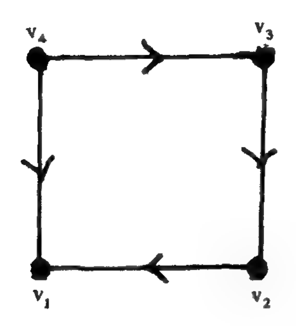
الحل : نأخذ كل المجموعات الجزئية الممكنة من مجموعة الحافات $E(G)$ ، على أن نهمل تلك التي تؤدي الى بيانات جزئية متشاكلة . فنحصل على البيانات الجزئية المبينة في شكل (1 - 11).



شكل (1 - 11)

واضح أن لدينا 10 بيانات جزئية مختلفة ؛ بالطبع ، كل بيان يعتبر ، حسب التعريف ، بياناً جزئياً من نفسه . اذا أردنا أن نجد كل البيانات الجزئية ومن ضمنها المتشاكلة بعضها مع بعض ، فسوف نحصل على $32 = 2^5$ بياناً جزئياً ، وذلك لان عدد الحافات في البيان المعطى G هو 5 .

مثال (2) : جد كل البيانات الجزئية الموجهة للبيان الجزئي الموجه D المعطى في شكل (1 - 12) ، التي لها نفس رؤوس D .

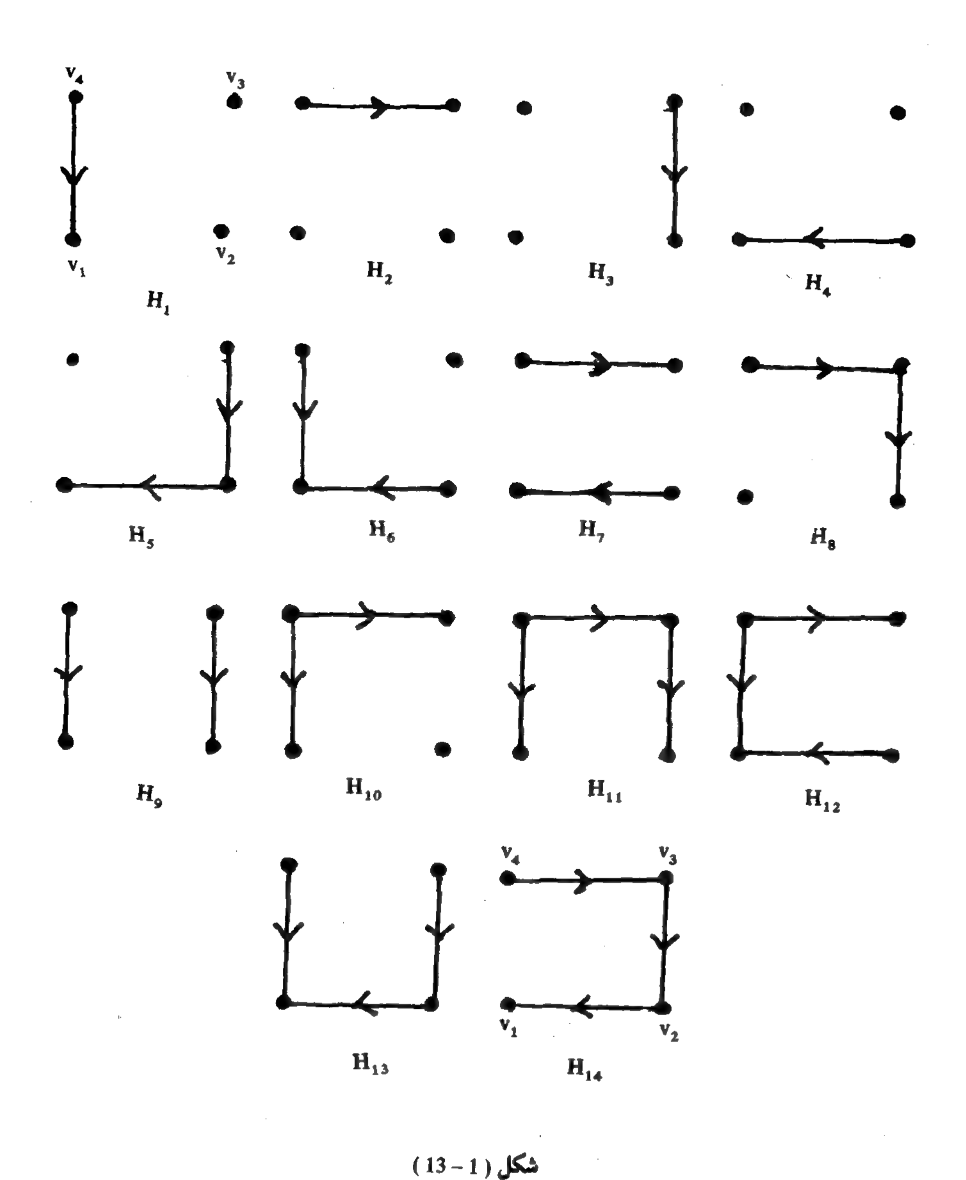


شكل (1 - 12)

الحل : المطلوب في هذا المثال ايجاد كل البيانات الجزئيه من ضمنها المتشاكلة بعضها مع بعض ، لذلك فان لدينا $16 = 2^4$ بيانا جزئياً موجهاً من ضمنها N_4 و D نفسه ؛ وقد رسمت البقية في شكل (1 - 13). لاحظ ان H_1, H_2 , H_3 و H_4 متشاكلة بعضها مع بعض ، كذلك H_5 متشاكل مع H_8 ، وH_7 متشاكل مع H_9. كم عدد البيانات الجزئية المختلفة في D ؟

من البيانات الجزئية المهمة بخاصة هي البيانات المقطعية (section graphs) التي نعرفها هنا . لتكن W مجموعة جزئية من V ، مجموعة رؤوس بيان G . يعرف البيان المقطعي ، الذي يرمزله G(W) ، على انه البيان الجزئي من G الذي مجموعة رؤوسه W والذي حافاته هي كل حافات G التي تصل رأسين في W . وعندما W = V يكون البيان المقطعي هو G نفسه . وعندما تكون W = { v } مكونة من رأس واحد فقط . فان G (v) يتكون من كل اللفات (ان وجدت) عند الرأس v .

ومن البيانات الجزئية الاخرى ، النجمة المعرفة برأس v ، وهي تتكون من كل حافات G الواقعة على الرأس v ، اللفات عند v (ان وجدت) قد تؤخذ أوقد لاتؤخذ .



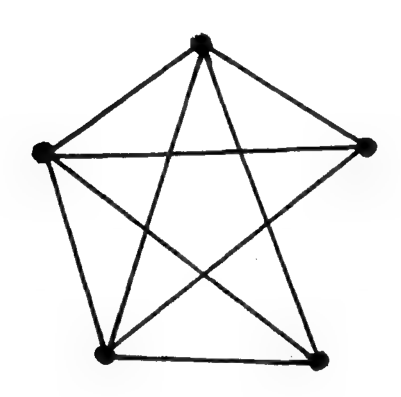
شكل (1 – 13)

ففي المثال (1) ، البيان الجزئي H_5 المبين في شكل (1 – 11) هو نجمة معرفة بالرأس v_1 ؛ كما أن H_8 في شكل (1 – 13) هو نجمة معرفة بالرأس v_3 للبيان المتجه D المبين في شكل (1 – 12) .

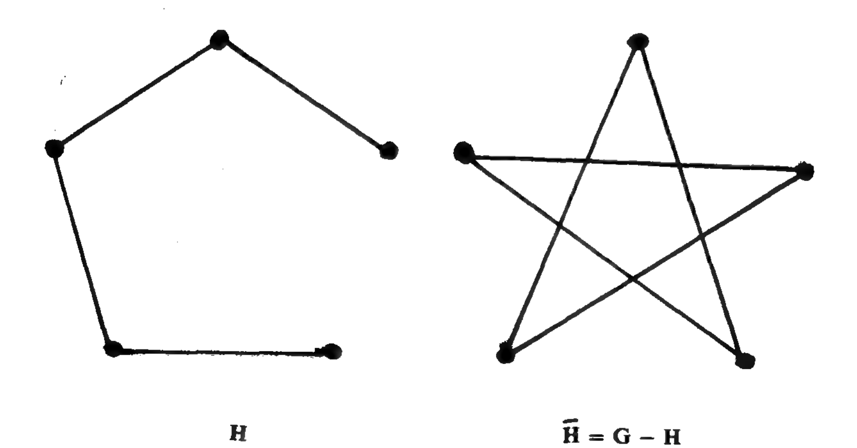
لكل بيان جزئي H من بيان G يوجد بالمقابل بيان جزئي وحيد يطلق عليه البيان الجزئي المتمم لـ H في G (the complementary subgraph of H in G) ويرمز له $\bar{H}$ ، وهو يتكون من رؤوس G مع كل حافات G التي هي ليست حافات في البيان الجزئي H . وسوف نشير الى البيان الجزئي المتمم لـ H في G بكتابة

$$\bar{H} = G - H .$$

ففي شكل (1 - 14) أعطي بيان G ، وبيان جزئي H من G مع البيان الجزئي المتمم $\bar{H}$ لـ H في G .

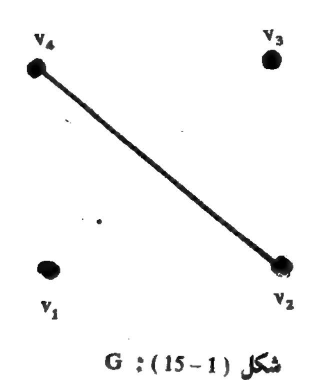


G



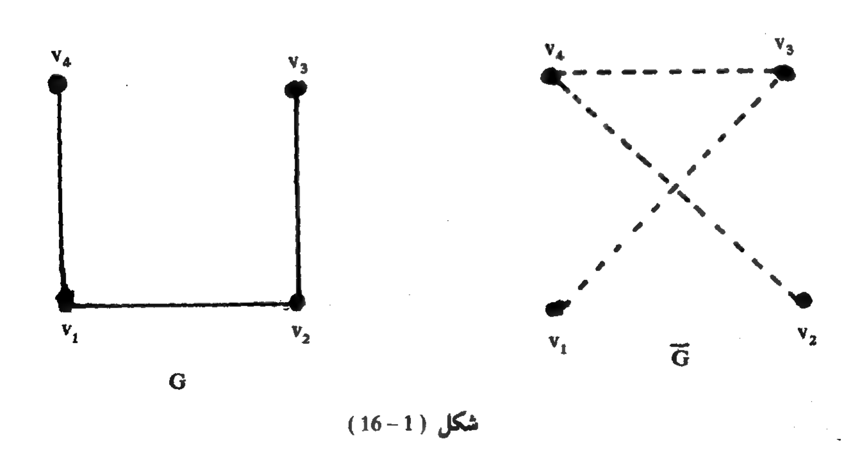
شكل (1 - 14)

اذا كان G بياناً بسيطاً ، فاننا نعرف متمم G ، الذي يرمز له $\overline{G}$ ، بانه البيـــــان البسيط الـذي رؤوســه V (G) وحافاتــه هي كــل الحافـات [u, v] ، حيث u, v ε V (G) ، التي هي ليست حافات في G . فمثلاً ، اذا كان $\overline{G}$ هو البيان المعطى في شكل (1 – 10) فان متممه G هو البيان المعطى في شكل (1 – 15) .



شكل (1 – 15) : G

يقال لبيان بسيط G انه متمم ذاتي (self – complementary) اذا كان G متشاكلا مع متممه $\overline{G}$. فمثلاً ، البيان G المعطى في شكل (1 – 16) متشاكل مع متممه $\overline{G}$ ، ولذلك فان G متمم ذاتي .



شكل (1 – 16)

* (1 – 4) بعض العمليات على البيانات

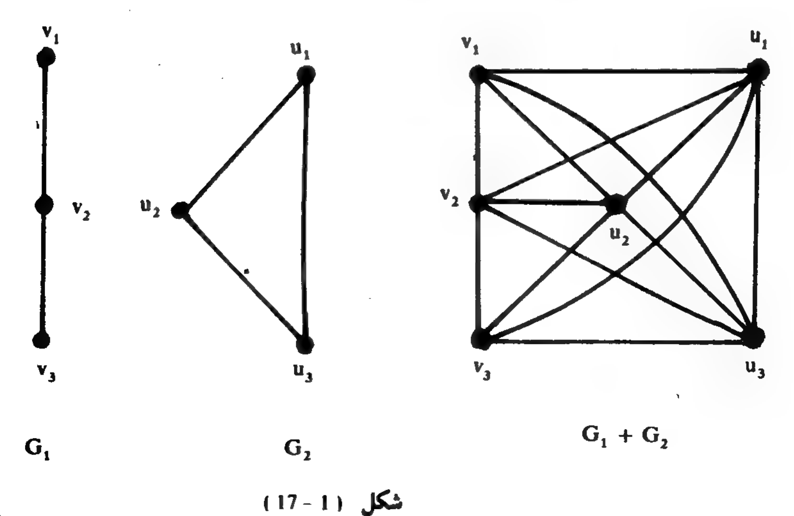
نذكر في هذا البند بعض العمليات على البيانات .

يقال للبيانين $G_1 = (V_1 , E_1)$ و $G_2 = (V_2 , E_2)$ انهما منفصـــلان (disjoint) اذا كان $V_1 \cap V_2 = \phi$ ، حيث ϕ هي المجموعة الخالية . كما يقال انهما منفصلان بالنسبة للحافات اذا كان $E_1 \cap E_2 = \phi$. واضح أنه اذا كان البيانان G_1 و G_2 منفصلين فانهما منفصلان بالنسبة للحافات ، ولكن العكس غير صحيـــح .

ليكن $G_1 = (V_1 , E_1)$ و $G_2 = (V_2 , E_2)$ أي بيانين بسيطين . يعرف اتحاد (union) G_1 و G_2 بانه البيان $G_1 \cup G_2$ الذي مجموعة رؤوسه هي $V_1 \cup V_2$ ومجموعـــة حافاتـه هي $E_1 \cup E_2$. يمكن تعميم عملية الاتحاد لاي عدد منته مـــن البيانات ؛ فاذا كانت $G_1 , G_2 , \ldots , G_k$ بيانات بسيطة فان اتحادها هو البيان $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ الذي مجموعة رؤوسه هي $\bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$ ومجموعة حافاته هي $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$

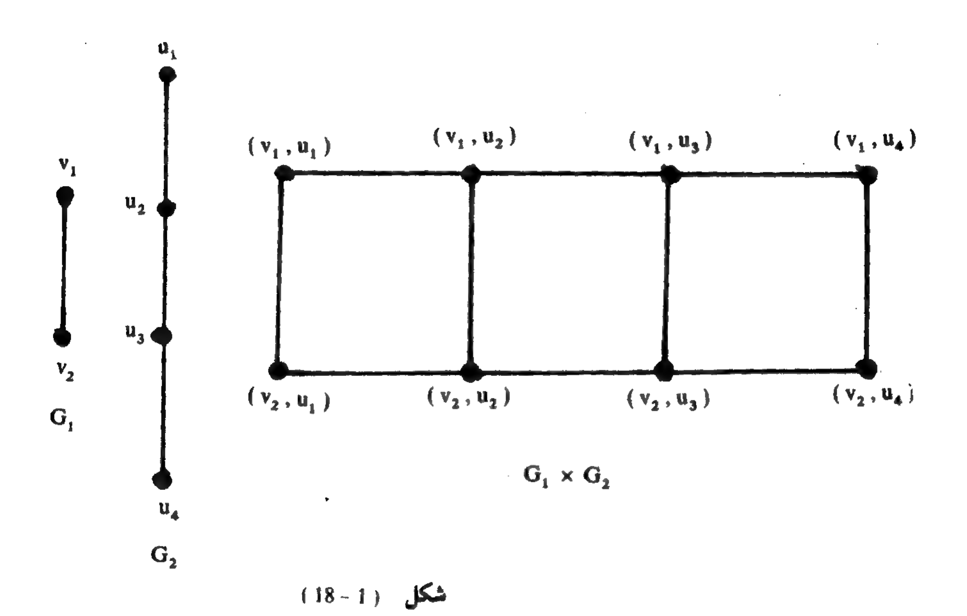
واضح أن عملية الاتحاد تحقق خاصيتي التجميع والتبادل .

اذا كان G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين . فان بيان اتصال (join) هذين البيانين هو البيان الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1) \cup V(G_2)$ وحافاته هي كافـــة حافات G_1 و G_2 مع كل الحافات التي تصل رأسا في G_1 مع رأس في G_2 . ويرمز له بـ $G_1 + G_2$. ولهذا يسمى احياناً مجموع G_1 مع G_2 . شكل (1 – 17) يوضـــح عملية اتصال بيانين .



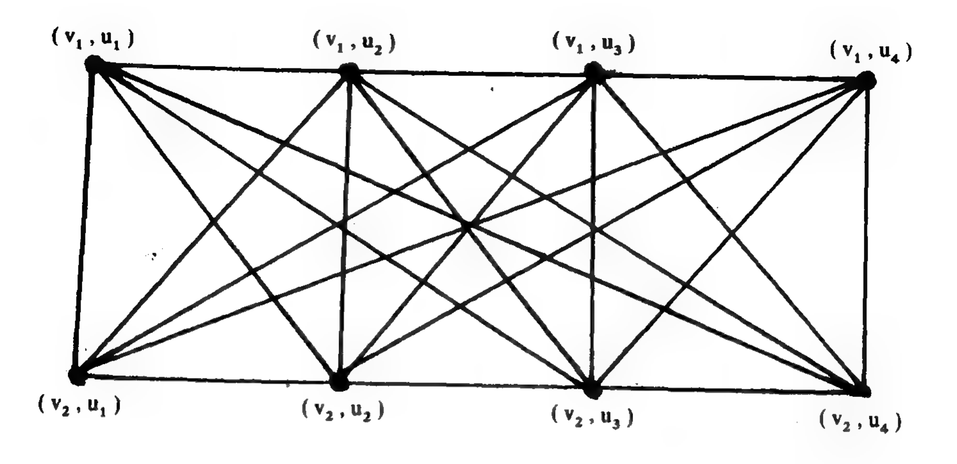
شكل (1 – 17)

هنالـك عمليـات ثنائيـة أخرى عديـدة تعـرف على بيانيـن بسيطين منفصلين أ $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ وهي تؤدي الى بيان مجموعة رؤوسه هي الحاصل الديكارتي للمجموعتين V_1 و V_2. من هذه العمليات الضرب والتركيب. فيعرف الضرب $G_1 \times G_2$ بانه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V_1 \times V_2$ ، ويكون الرأسان (v_1, u_1) و (v_2, u_2) متجاورين متى ماكان [$v_1 = v_2$ و u_1 متجاوراً مع u_2] أو [$u_1 = u_2$ و v_1 متجاوراً مع v_2] شكل (1 - 18) يوضح بجلاء هذا التعريف.



شكل (1 - 18)

واخيراً لنفس البيانين G_1 و G_2 ، نعرف التركيب (the composition) $G_1 [G_2]$ بانه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V_1 \times V_2$ ويكون فيه الرأسان (v_1, u_1) و (v_2, u_2) متجاورين متى ماكان [v_1 متجاوراً مع v_2] أو [$v_1 = v_2$ و u_1 متجاوراً مع u_2].
شكل (1 - 19) يبين التركيب $G_1 [G_2]$ للبيانين G_1 و G_2 المعطيين في شكل (1 - 18).



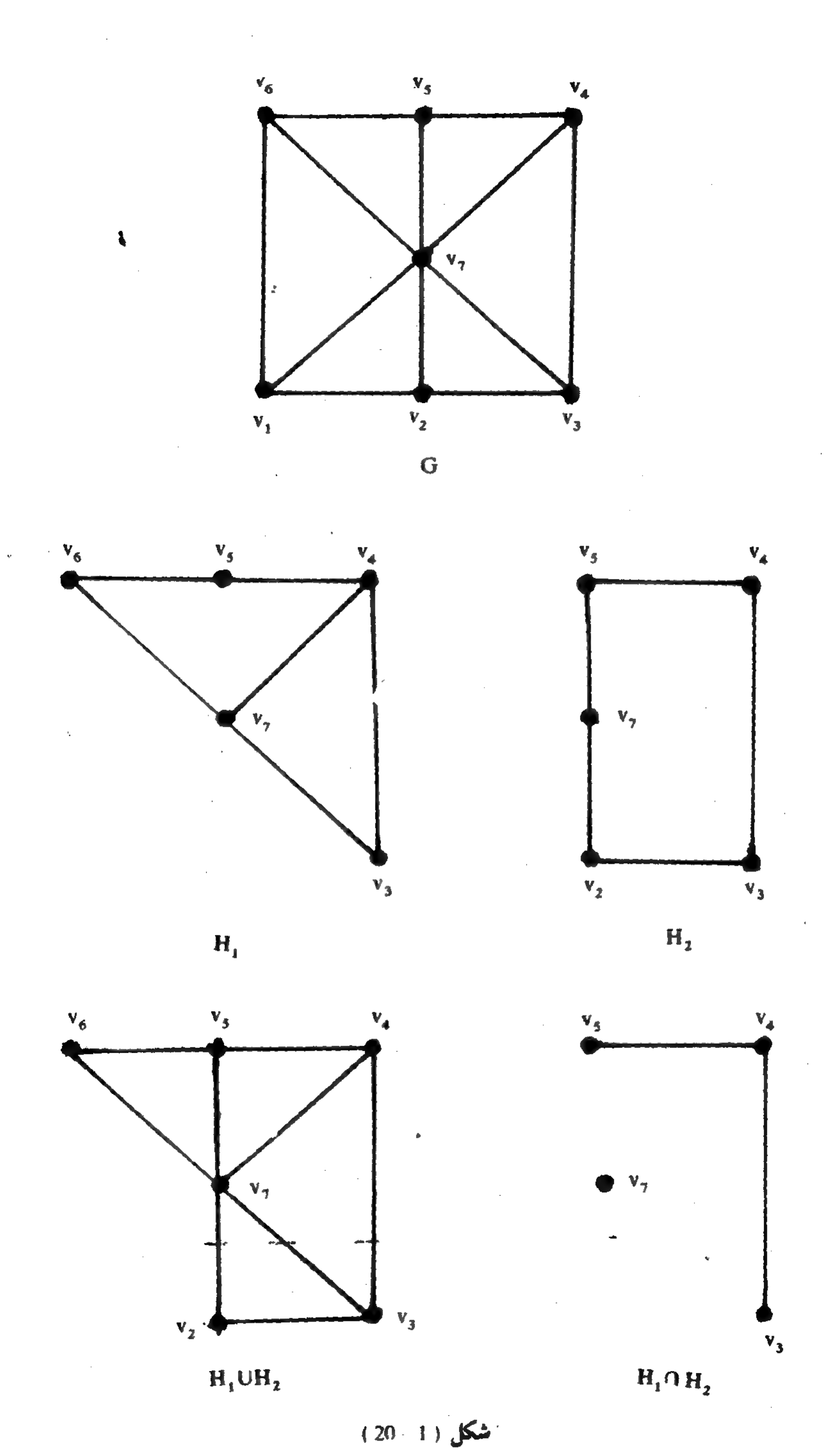
$G_1 [G_2]$

شكل (1 - 19)

هنالك عملية ثنائية تعرف على البيانات الجزئية لبيان ما. وهي عملية التقـــاطـــع (intersection). فاذا كان H_1 و H_2 بيانين جزئيين من بيان بسيط G. وكان $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \phi$، فان بيان تقاطعها $H_1 \cap H_2$ هو بيان جزئي من G مجموعة رؤوسه هي $V(H_1) \cap V(H_2)$ ومجموعه حافاته هي $E(H_1) \cap E(H_2)$ طبيعي أنه. يمكن تعميم هذه العملية لأي عدد منته من البيانات الجزئية لنفس البيان. فاذا كانت $H_1, H_2, \ldots, H_k$ بيانات جزئية من بيان بسيط G. وكان

$$\bigcap_{i=1}^{k} V(H_i) \neq \phi ,$$

فان بيان تقاطعهما $\bigcap_{i=1}^{k} H_i$ هو بيان جزئي من G مجموعة رؤوسه $\bigcap_{i=1}^{k} V(H_i)$ ومجموعة حافاته $\bigcap_{i=1}^{k} E(H_i)$. في شكل (1 - 20). كل من H_1 و H_2 بيان جزئي من G ; ولقد ذكرنا كلاً من $H_1 \cup H_2$ و $H_1 \cap H_2$.

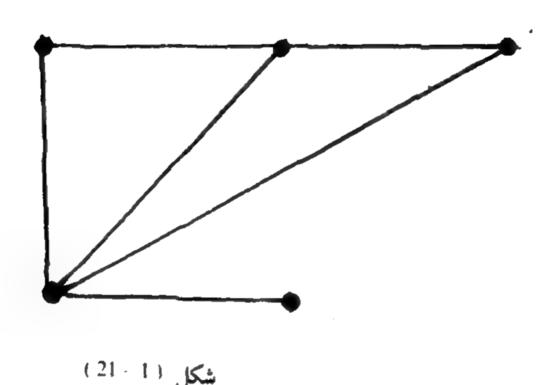


شکل (1 ـ 20)

✱ تمارين (1 - 3)

(1) إرسم كل البيانات البسيطة التي لها أربعة رؤوس (بحدود التشاكل).

(2) جد كل البيانات الجزئية المختلفة بخمسة رؤوس من البيان G المعطى في شكــل (1 - 21)



شكل (1 - 21)

(3) ليكن H_1 و H_2 بيانين جزئيين من البيان البسيط G . إثبت ان

$$H_1 \cup H_2 = \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 .$$

$$H_1 \cap H_2 = \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2 .$$

(4) ليكن G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين . أثبت صواب أو خطأ

$$G_1 + G_2 = \bar{G}_1 + \bar{G}_2 .$$

(5) لتكن H_1 ، H_2 و H_3 ثلاثة بيانات جزئية من البيان البسيط G . فاذا علمت ان

$$V(H_1) \cap V(H_2) \neq \phi , \quad V(H_1) \cap V(H_3) \neq \phi , \quad V(H_2) \cap V(H_3) \neq \phi .$$

فأثبت ان

$$H_1 \cup (H_2 \cap H_3) = (H_1 \cup H_2) \cap (H_1 \cup H_3) .$$

$$H_1 \cap (H_2 \cup H_3) = (H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_3).$$

(6) لتكن G_1 ، G_2 وG_3 ثلاثة بيانات بسيطة منفصلة. إثبت صواب أو خطأ

$$G_1 + (G_2 \cup G_3) = (G_1 + G_2) \cup (G_1 + G_3).$$

(7) إثبت ان عدد رؤوس أي بيان متمم- ذاتي هو $4r$ او $4r+1$، حيث أن r عـدد صحيح موجب.

(8) هل إن عملية الأتصال تحقق خاصية التبادل ؟ خاصية التجميع؟

(9) جد $G_2 \times G_1$ و $G_1 \times G_2$ ، حيث إن G_1 و G_2 هما البيانان المعطيان في شكل (1 - 17). هل إن $G_2 \times G_1$ و $G_1 \times G_2$ متشاكلان؟

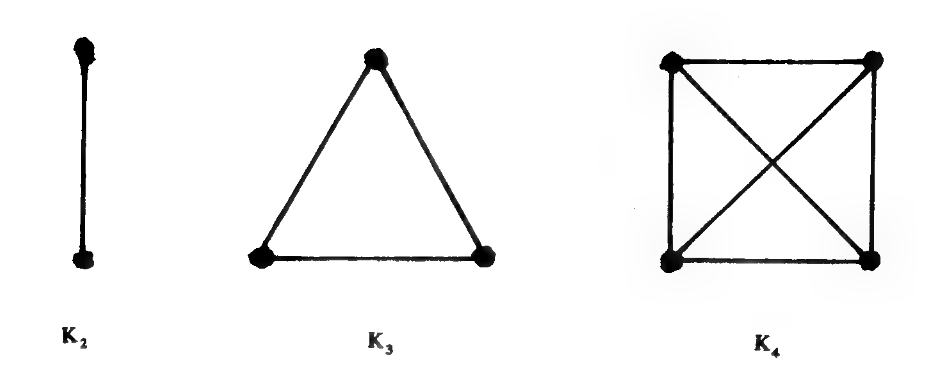
(10) جد $G_1 [G_2]$ ، حيث إن G_1 و G_2 هما البيانان المعطيان في شكل (1 - 18). هل إن $G_1 [G_2]$ و $G_2 [G_1]$ متشاكلان؟

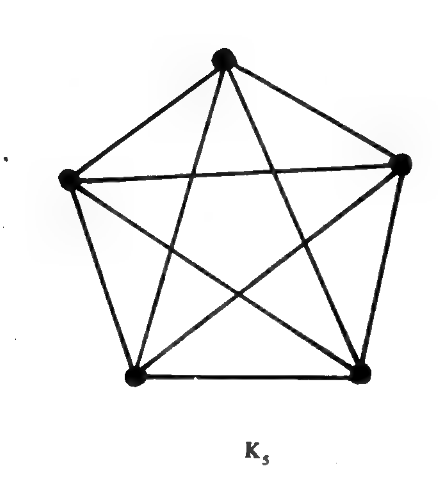
(11) اذا كان G_1 وG_2 بيانين بسيطين منفصلين ، وكان عدد رؤوس G_1 هو n_1 وعدد حافاته m_1 ، وعدد رؤوس G_2 هو n_2 وعدد حافاته m_2 ، فجد عدد رؤوس وعدد حافات كل من البيانات $G_1 [G_2]$، $G_1 \cup G_2$ ، $G_1 + G_2$ ، $G_1 \times G_2$.

(1 - 5) بعض البيانات الخاصة

سوف نشرح في هذا المجال العديد من البيانات المهمة والمشهورة التي سوف نتعرض لها في بعض اجزاء الكتاب. لذلك نجد من الضروري ان يتعرف عليها القاريء.

يقال إن البيان G بيان تام (complete graph) اذا كان G بسيطا وكل رأسين مختلفين فيه متجاورين. ويرمز عادة للبيان التام الذي عدد رؤوسه n بـ K_n . البيانـات التامة K_n ، حيث $n = 2, 3, 4, 5$. مبينة في شكل (1 - 22) . واضح ان درجة كل رأس في K_n هي $(n - 1)$. ولما كان عدد حافات كل بيان يساوي نصف مجموع درجات رؤوسه [مبرهنة (1 - 1)]. فان عدد حافات K_n هو $n (n - 1) / 2$.





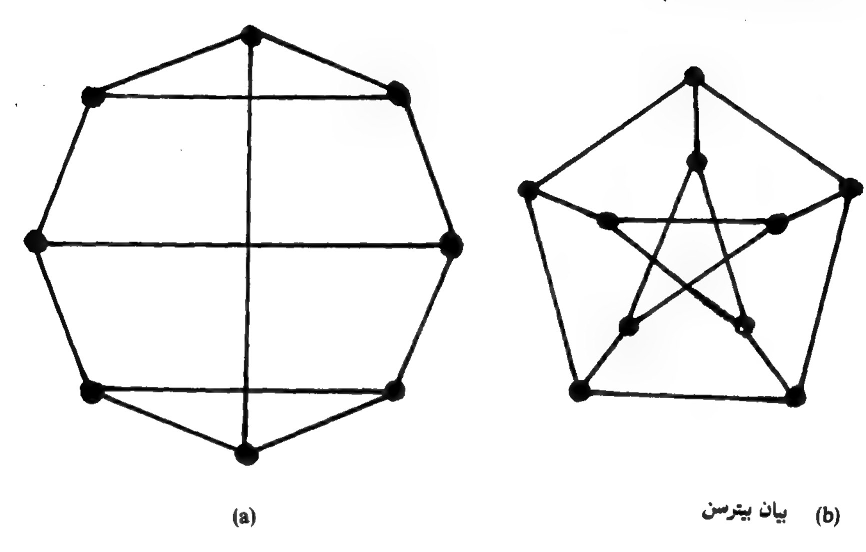
شكل (1 - 22)

يقال ان البيان الموجه D بيان موجه تام اذا كان D بسيطا وفيه حافتان موجهتـان باتجاهين مختلفين بين كل رأسين مختلفين. وبذلك. فان البيان الموجه البسيط يكون تاماً اذا ادى اهمال اتجاهات الحافات وحذف مضاعفاتها الى بيان تام .

اذا كانت درجة كل رأس v في بيان G هي r . أي أن $\rho(v) = r$. فعندئذ يطلق على G بيان منتظم من الدرجة r . وباختصار منتظم-r (r – regular) . واضح ان كل بيان تام K_n هو بيان منتظم من الدرجة (n – 1)؛ وان N_r هو بيان منتظم من الدرجة

صفر. طبيعي، ان متمم كل بيان منتظم-r بسيط هو بيان منتظم-(n - r - 1) .

من البيانات المنتظمة المهمة، في قضايا التلوين بالاخص، هي البيانات التكعيبية (the cubic graphs) وهي التي تكون درجة كل رأس فيها مساوية لـ3. ففي شكل (1 - 23) يوجد بيانان تكعيبيان؛ يعرف البيان في (b) باسم بيان بيترسن (Petersen graph) .



(a) (b) بيان بيترسن

شكل (1 - 23)

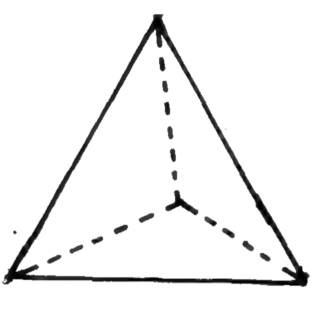
من البيانات المنتظمة المشهورة تلك المعروفة باسم بيانـــات أفلاطونية (Platonic graphs)، وهي بيانات منتظمة تتكون من رؤوس وحافات الاجسام (الافلاطونية) المنتظمة الخمسة الآتية: رباعي السطوح (أي هرم ثلاثي (tetrahedron)، مكعب، ثماني السطوح (octahedron)، وذو الاثني عشر سطحاً (dodecahedron)، وذو العشرين سطحاً (icosahedron)؛ وقد رسمت هذه الاجسام في شكل (1 - 24) ورسم في شكل (1 - 25) البيانات الافلاطونية المقابلة لها، على الترتيب.

يعرف البيان الثنائي التجزئة (bipartite graph) بانه بيان G = (V, E) بحيث يمكن تجزئة(*) المجموعة V الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث أن كل

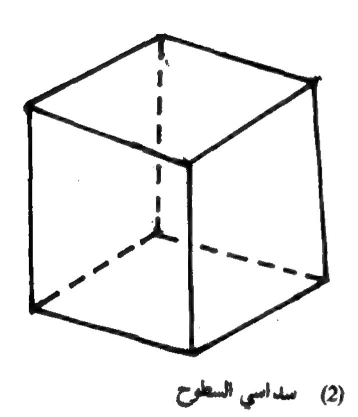
(*) يقال ان $V_1, V_2, \dots, V_r$ تجزئة للمجموعة V اذا كان :

(a) $V_i \neq \phi$; (b) $V_i \cap V_j = \phi, i \neq j$; (c) $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$.

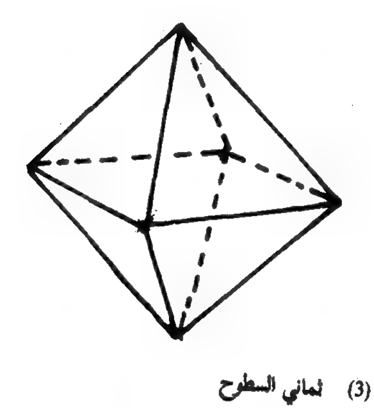
حافة في E تصل راساً في V_1 برأس في V_2. [أنظر شكل (1 – 26)]. ويمكن أن نرمز لهذا البيان الثنائي التجزئة بـ $G = (V_1, V_2; E)$.



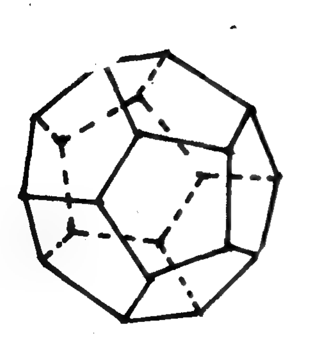
(1) ثلاثي السطوح



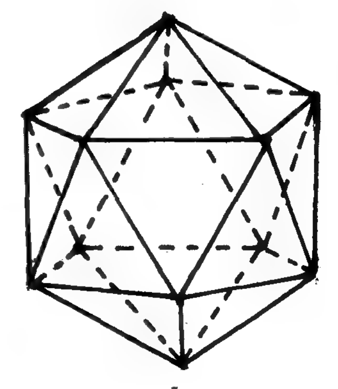
(2) سداسي السطوح



(3) ثماني السطوح

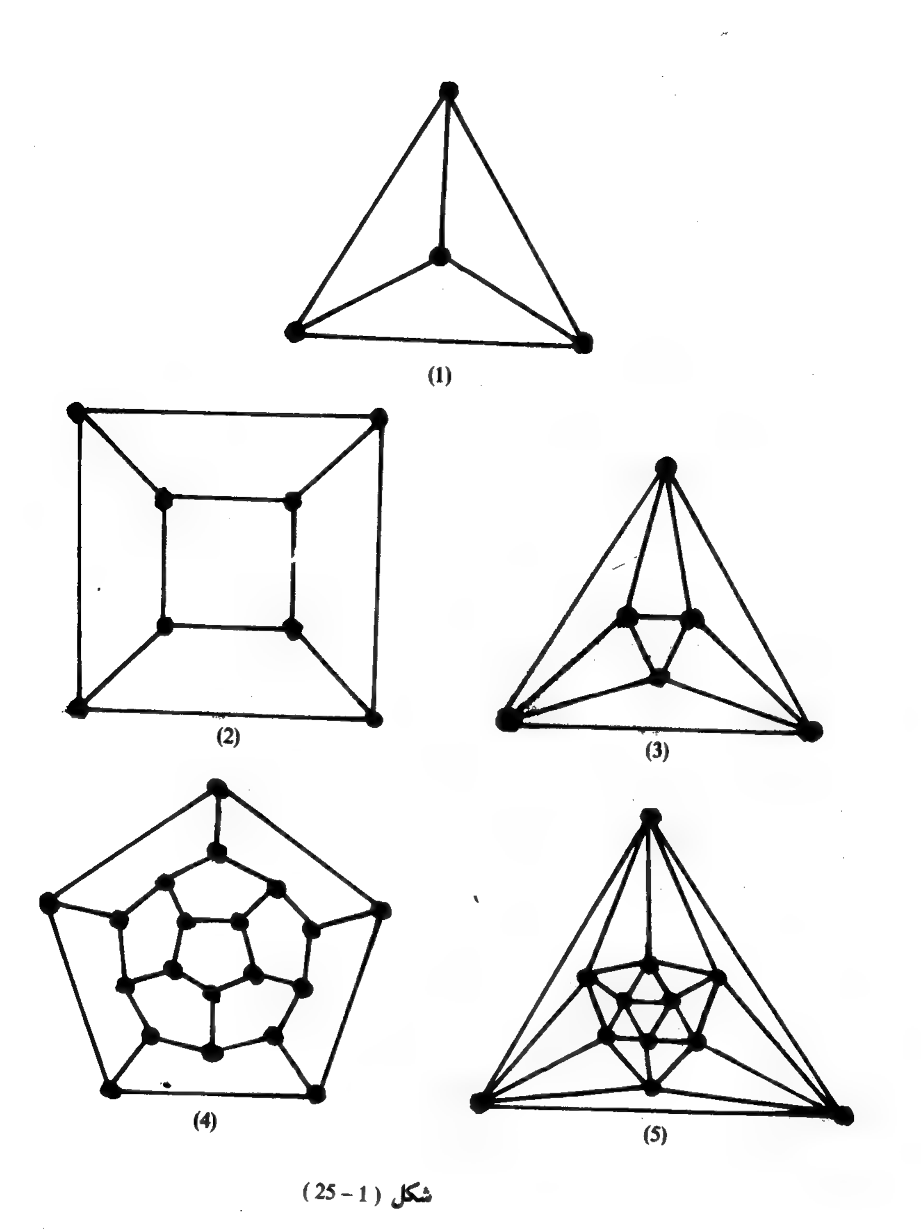


(4) ذو الاثني عشر سطحاً

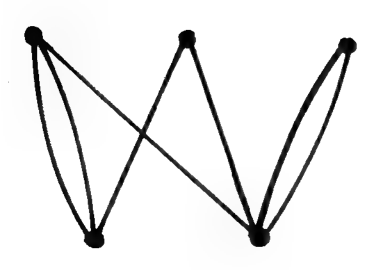


(5) ذو العشرين سطحاً

شكل (1 – 24)



شکل (1 - 25)





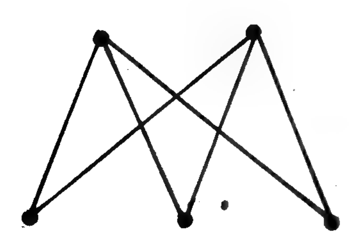
شكل (1 - 26) : بيان ثنائي التجزئة

واضح انــه اذا كان G بياناً وكان ممكناً تلوين رؤوسه بلونين ، أحمــر أو أزرق ، بحيث لايوجد رأسان متجاوران لهما نفس اللون ، فعند ذلك يكون G بياناً ثنائـــــي التجزئة .

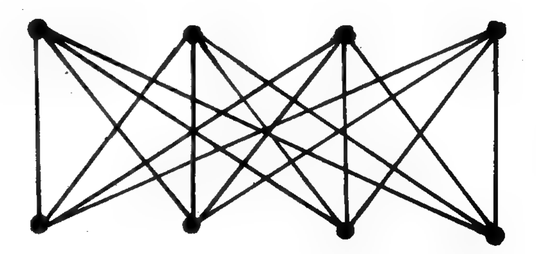
ويقال لبيان بسيط G أنه ثنائي التجزئة تام (complete bipartite) اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه $\overline{V}$ الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 بحيث ان كل رأس في V_1 متجاور مع كل رأس في V_2 ، وكل رأس في V_2 متجاور مع كل رأس في V_1 ، ولايوجد رأسان في V_1 (V_2) متجاوران اي أن مجموعة حافات G هي

$$E = \{ [u, v] \mid u \varepsilon V_1 , v \varepsilon V_2 \} .$$

واذا كان عدد الرؤوس في V_1 هو m وفي V_2 هو n فعندئذ يرمز للبيان الثنائي التجزئة التام بـ $K_{m,n}$. فمثلاً ، البيانان $K_{3,2}$ و $K_{4,4}$ مرسومان في شكل (1 - 27) توضيحاً لهذا التعريف .



$K_{3,2}$

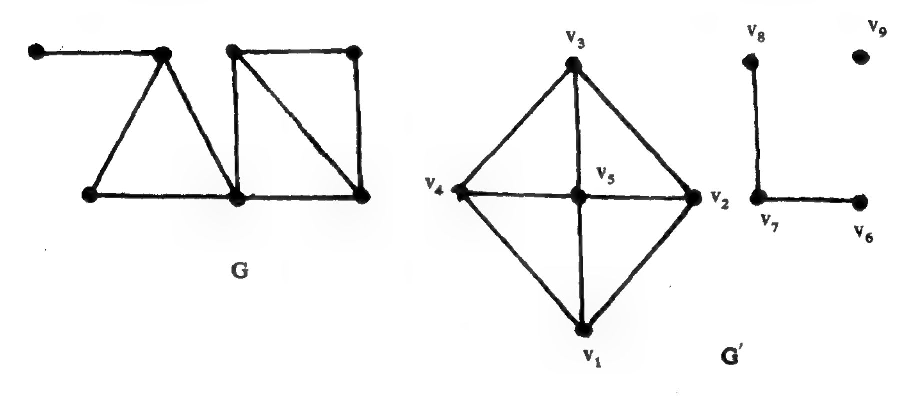


$K_{4,4}$

شكل (1 - 27)

واضح ان كل نجمة بسيطة هي بيان ثنائي التجزئة تام $K_{n,1}$. لاحظ ان عدد رؤوس $K_{m,n}$ هو $m + n$ وعدد حافاته هو mn .

يقال لبيان G انه غير متصل (disconnected) اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه الى V_1 و V_2 بحيث لاتوجد اية حافة في G تصل رأساً في V_1 برأس في V_2 ؛ ويقال لبيان انه متصل (*) (connected) فيما عدا ذلك ، اي اذا لم يكن بالامكان تجزئة V الى V_1 و V_2 بحيث لاتوجد حافة تصل رأساً في V_1 برأس في V_2 . البيان G في شكل (1 – 28) هو بيان متصل ، ولكن البيان G' غير متصل .

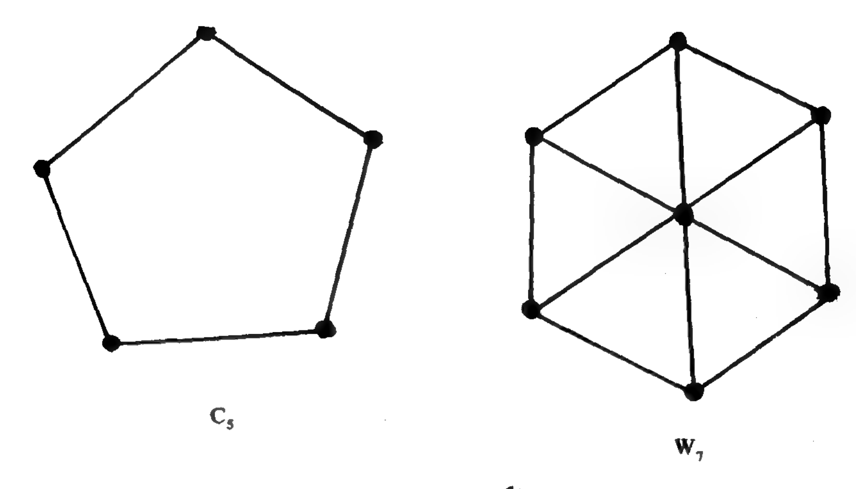


شكل (1 – 28)

يقال للبيان الجزئي المتصل غير المحتوى فعليا في اي بيان جزئي متصل آخر من البيان G انه مركبة (component) لـ G . البيان G' في شكل (1 – 28) يتكون من ثلاث مركبات. طبيعي ، اذا كان بيان مكون من مركبة واحدة فهو بيان متصل ؛ كما ان كل بيان متصل يتكون من مركبة واحدة .

يقال لبيان متصل انه دارة (cycle) اذا كان منتظماً ومن الدرجة 2 . يرمز للدارة التي عدد رؤوسها n بالرمز C_n . كما يقال لبيان مكون من n رأساً ، حيث $n \geq 3$ ، انه عجلة (wheel) اذا كان مكوناً من الدارة C_{n-1} مع رأس متجاور مع كل رؤوس C_{n-1} ، ويرمز لهذه العجلة بـ W_n . شكل (1 – 29) يبين C_5 W_7

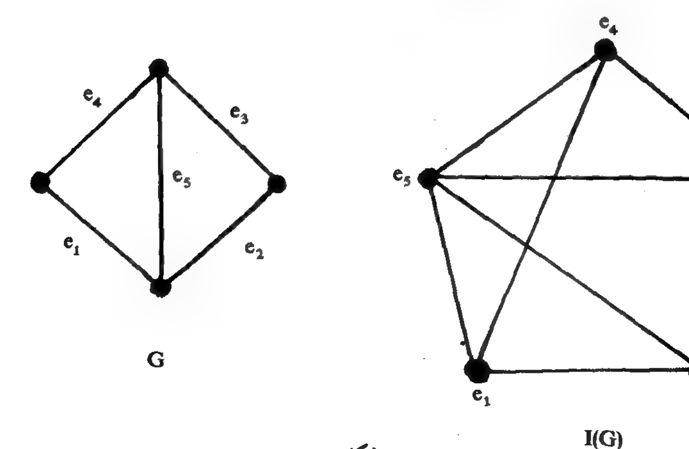
(*) يمكن تعريف البيان المتصل والبيان غير المتصل باستعمال مفهوم الدرب الذي سوف نأتي الى شرحه في الفصل الثاني .



شكل (1 - 29)

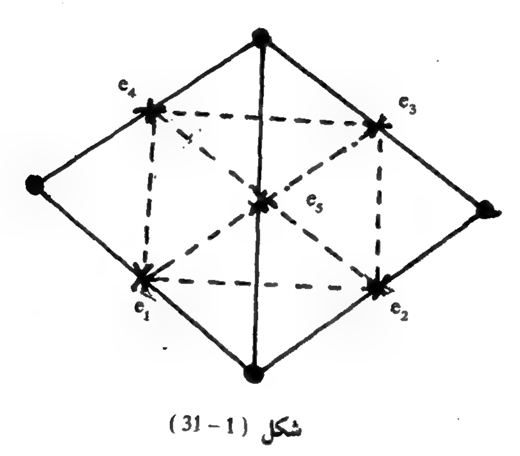
يقال لبيان G انه ذوتجزئة – k اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه V الى مجموعات جزئية غير خالية $V_1, V_2, \ldots, V_k$ بحيث لاتوجد اية حافة في G تصل رأسين في نفس المجموعة الجزئية .

ليكن G بياناً بسيطاً . يعرف بيان المناقلة (interchange) لـ G ، الذي يرمز له بـ I (G) ، بانه البيان الذي عدد عناصر مجموعة رؤوسه يساوي عدد عناصر E (G) ، وعندما يرمز لرؤوسه بالرموز التي تمثل حافات البيان G ، فان رأسين e و e′ في I (G) يكونان متجاورين اذا واذا فقط كانت الحافتان e و e′ في G متجاورتين . الشكل (1 - 30) يوضح هذا التعريف .



شكل (1 - 30)

يمكن أن نحصل على $I(G)$ بسهولة ؛ وذلك بوضع رأس ، v_e ، ممثلاً بعلامة × على كل حافة e من G ، ثم نصل الرأسين v_e و $v_{e'}$ بحافة تنتمي الى $I(G)$ اذا واذا فقط كانت الحافتان المقابلتان لهما e و e' متجاورتين في G . الشكل (1 - 31) يوضح هذه الطريقة بالنسبة للبيان G المعطى في شكل (1 - 30) .



شكل (1 - 31)

تمارين (1 - 4)

(1) اعط مثالاً (مع الرسم) لكل من البيانات الآتية :

(أ) بيان بسيط ثنائي التجزئة منتظم من الدرجة 4 .

(ب) عجلة بحيث تكون أحدى مركبات بيانها المتمم دارة .

(جـ) بيان بسيط متصل منتظم برتبة 7 عدد حافاته 14 .

(د) بيان بسيط G بحيث يكون متشاكلاً مع $I(G)$.

(2) برهن على ان اي بيان متصل برتبة n يجب ان يحتوي على مالايقل عن $(n-1)$ من الحافات .

(3) جد بيان المناقلة للبيان K_4 . من أي البيانات الأفلاطونية يكون $I(K_4)$ ؟

(4) هل يمكن ايجاد بيان G بحيث أن $I(G)$ نجمة ؟

(5) اثبت ان $I(K_n)$ هو بيان منتظم بدرجة $(2n-4)$. واثبت ان $I(K_{m,n})$ هو بيان منتظم بدرجة $(m+n-2)$.

(6*) ليكن G بياناً بسيطاً برتبة 6 . اثبت ان K_3 بيان جزئي من G اومن $\bar{G}$.
[تلميح : خذ أي رأس v في G وناقش الحالات $\rho(v) = 0, 1, 2, \ldots, 5$ لاثبات أن $\bar{G}$ يحتوي K_3 عندما لايحتوي G على K_3] .

(6 – 1) مصفوفات الوقوع [*] (Incidence Matrices)

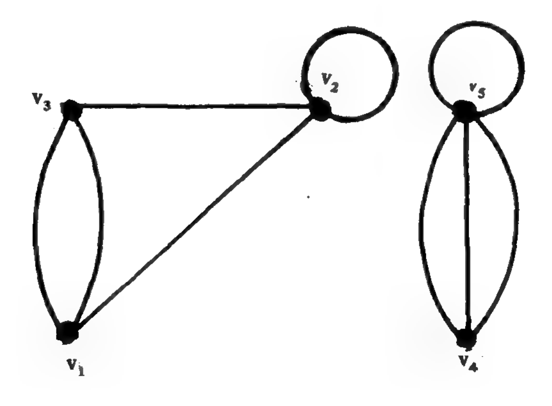
هناك العديد من المصفوفات التي يمكن استخدامها لتمثيل البيانات (الموجهة أوغير الموجهة) أوتمثل بعض البيانات الجزئية لبيان ما . ونشرح في هذا المجال المصفوفات التي تمثل العلاقة الاساسية بين رؤوس بيان ما وحافاته ، هذه العلاقة هي علاقة الوقوع ، اي وقوع الرؤوس على الحافات . وسوف نعرض في الفصول القادمة أنواعاً اخرى من المصفوفات ذات الأهمية التطبيقية في نظرية البيانات .

ليكن $G = (V, E)$ بياناً فيه $V = \{ v_1 , v_2 , \dots , v_n \}$. تعرف مصفوفة التجاور (adjacency matrix) ، اومصفوفة الوقوع للرؤوس (vertex incidence matrix) ، بانها مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ من السعة $n \times n$ فيها a_{ij} مساوٍ لعدد الحافات التي تصل الرأسين v_i و v_j ؛ طبيعي أن a_{ii} يساوي عدد اللفات عند الرأس v_i ؛ واذا كان الرأسان v_i و v_j غيرمتجاورين يكون $a_{ij} = 0$. واضح ان A مصفوفة متناظرة .

اذا كان G بياناً بسيطاً ، عندئذ تكون قيمة كل عنصرفي مصفوفة تجاوره اما 0 واما 1 ، وتكون عناصر قطره الرئيسى كلها أصفاراً .

وبالمثل ، تعرف مصفوفة التجاور لبيان غيرمنته ، وعند ذلك تكون مصفوفة غير منتهية السعة .

مثال (1) : اكتب مصفوفة التجاور للبيان المعطى في شكل (1 – 32) .



شكل (1 – 32)

(*) نقترح على الطالب الذي يدرس الموضوع لاول مرة تأجيل قراءة هذا البند لحين الوصول الى البند (3 – 2)

الحل : بموجب التعريف تكوّن مصفوفة التجاور للبيان المعطى

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

لاحظ أن البيان المعطى في شكل(1 - 32) يتكون من مركبتين ، لذلك فانه من الطبيعي ان تتجزأ مصفروفة التجاور له قطرياً بحيث ان كل مصفوفة جزئية واقعة على القطر هي مصفوفة التجاور لمركبة واحدة .

طبيعي أن ، كل مصفوفة مربعة متناظرة التي عناصرها اعداد صحيحة غير سالبة هي مصفوفة تجاور لبيان ما ، ويمكن بطريقة مباشرة رسم ذلك البيان . من هذا نستنتج ان هنالك تقابلا متباينا بين البيانات (بحدود التشاكل) والمصفوفات المربعة المتناظرة التي عناصرها اعداد صحيحة غير سالبة .

ويمكن تعريف مصفوفة التجاور $\bar{A} = [\,\bar{a}_{ij}\,]$ لبيان موجة D على انه مصفوفة مربعة فيها $\bar{a}_{ij}$ مساوٍ لعدد الحافات الموجهة التي تصل من الرأس v_i الى الرأس v_j في D . طبيعي أنه ، لايشترط ان يكون $\bar{A}$ متناظراً .

والآن نعرف نوعاً آخراً من مصفوفات البيانات. ليكن G بياناً بسيطاً مجموعة حافاته هي $E = \{ e_1 , e_2 , \ldots , e_k \}$. تُعرف مصفوفة الوقوع لحافات البيان البسيط G على أنها مصفوفة $M = [\, m_{ij} \,]$ مربعة (edge incidence matrix) بسعة $k \times k$ فيها $m_{ij} = 1$ اذا كانت الحافتان e_i و e_j متجاورتين، ويكون $m_{ij} = 0$ اذا لم تكن الحافتان e_i و e_j متجاورتين، $m_{ii} = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, k$. واضح أن هذه المصفوفة متناظرة.

فمثلاً، مصفوفة الوقوع لحافات البيان المعطى في الشكل(1 - 30) هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

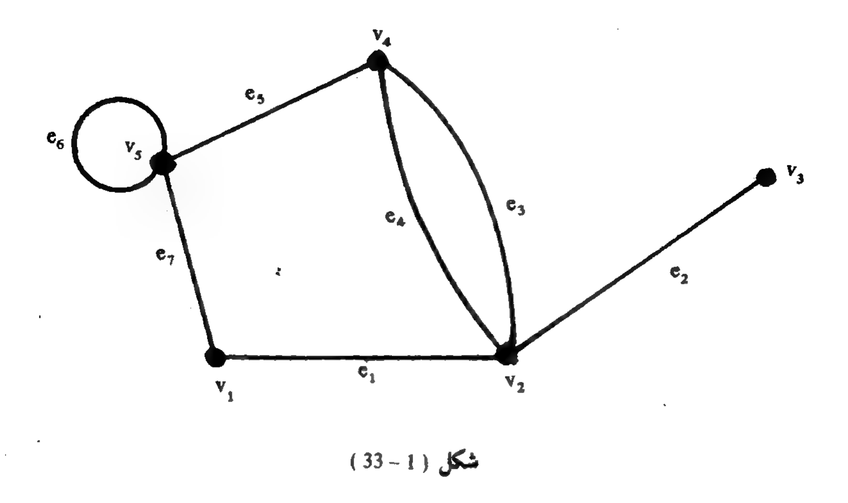
واخيراً ، يمكن تمثيل البيان بنوع اخر من المصفوفات .وهذا النوع من التمثيل لـه اهمية كبيرة في تطبيقات البيانات في الشبكات الكهربائية كما سنلاحظ في الفصـل السادس.

ليكن $G = (V, E)$ ، حيث ان

$$V = \{ v_1 , v_2 , \ldots , v_n \} \quad , \quad E = \{ e_1 , e_2 , \ldots , e_m \} ,$$

نعرف مصفوفة الوقوع (incidence matrix) للبيان G بانها مصفوفة $B = [b_{ij}]$ بسعة $n \times m$ بحيث إن $b_{ij} = 1$ عندما تكون الحافة e_j واقعة على الرأس v_i و $b_{ij} = 0$ فيما عدا ذلك واضح انه اذا كان G خالياً من اللفات. فان مجموع عناصر أي صف في B يساوي درجة الرأس الذي يقابل ذلك الصف. ومثال على ذلك . تكون مصفوفـة الوقوع للبيان G المعطي في الشكل (1 - 33) هي

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

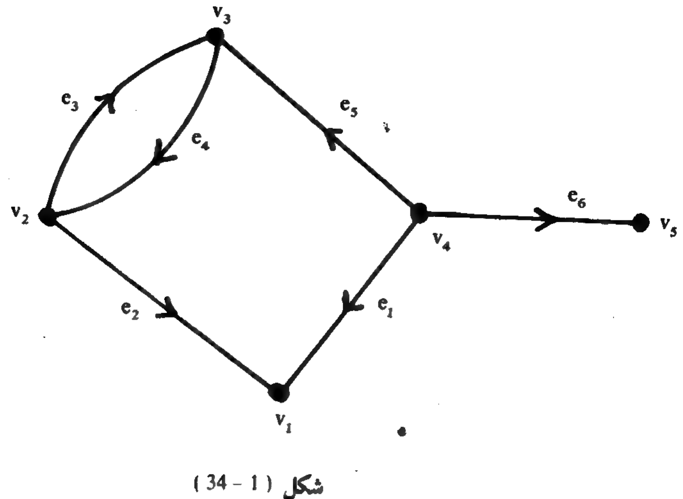


شكل (1 - 33)

لاحظ ان العمود في B الذي يحتوي على عنصر واحد غير صفري يمثل لفة، كما ان العمود الذي يحتوي بالضبط على عنصرين غير صفريين يمثل حافة تصل رأسين مختلفين. ولذلك، يمكن القول بان هنالك تقابلاً متبايناً بين البيانات (بحدود التشاكل) والمصفوفات التي عناصرها 1 أو0، بحيث ان كل عمود فيها يحتوي على عنصر أو عنصرين بقيمة1 .

وبالمثل، نعرف مصفوفة الوقوع لبيان موجة $D = (V, A)$ خال من اللفات بأنها المصفوفة $\bar{B} = [\bar{b}_{ij}]$ بحيث أن $\bar{b}_{ij} = 1$ عندما يكون v_i رأس الابتداء للحافة الموجهة e_j، وان $\bar{b}_{ij} = -1$ عندما يكون v_i رأس الانتهاء للحافة الموجهة e_j، وأن $\bar{b}_{ij} = 0$ اذا لم تكن الحافة الموجهة e_j واقعة على الرأس v_i. لاحظ أن كل عمود في B يحتوي بالضبط على عنصرين غير صفريين أحدهما 1 والآخر 1- . وتوضيحاً لذلك. تكون مصفوفة الوقوع للبيان الموجه المعطى في الشكل (1 - 34) هي.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



شكل (1 - 34)

مبرهنة(1 - 2):مرتبة مصفوفة الوقوع لبيان موجه متصل خالٍ من اللفات هي $(n - 1)$ حيث أن n هو عدد رؤوس البيان.

البرهان: لاجل اثبات المبرهنة نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي على n .
عندما يكون $n = 2$ تكون مصفوفة الوقوع إحدى المصفوفتين :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

وفقاً لوجود حافة موجهة واحدة اوحافتين موجهتين باتجاهين متعاكسين. واضح ان مرتبة كل من هاتين المصفوفتين هي 1 . إن وجود حافات موجهة مضاعفة يؤدي الى تكرار بعض الاعمدة. وهذا لايزيد المرتبة. لذلك. فان المبرهنة صحيحةل $n = 2$.

والآن. نفرض ان المبرهنة صحيحة لكل بيان موجه بـ$(n - 1)$ ،$n \geq 3$ من الرؤوس وخالٍ من اللفات. وتأمل المصفوفة $\bar{B}$ لبيان موجه متصل بدون لفات. D . لهnمن الرؤوس .يمكن ترتيب أسطر $\bar{B}$. دون التأثيرفي مرتبة المصفوفة. بحيث يصبح العنصرفي السطر الاول والعمود الاول هو 1 . وفي السطر الأخير والعمود الاول هو 1 – .

إن اضافة كل أسطر $\bar{B}$ ، من الاول الى ماقبل الأخير، الى السطر الاخير يؤدي الى سطر عناصره اصفار، لذلك، فان مرتبة $\bar{B}$ لاتزيد على $(n - 1)$

لتكن $\bar{B}_1$ هي المصفوفة الناتجة من $\bar{B}$ باضافة السطر الاول الى السطر الاخير. واضح ان العمود الاول في $\bar{B}_1$ يتكون من أصفار عدا العنصر الاول الذي قيمته هي 1 . إن مرتبة $\bar{B}_1$ هي نفس مرتبة $\bar{B}$. لتكن $\bar{B}_2$ المصفوفة الناتجة من $\bar{B}_1$.بحذف السطر الاول وكل الاعمدة الصفرية الناتجة بعد حذف السطر الاول. واضح أن $\bar{B}_2$ هي مصفوفة الوقوع لبيان موجه D_1 ناتج من D بتطابق الرأسين المقابلين للسطرين الاول والاخير في $\bar{B}$ ، مع حذف كل لفة ناتجة من هذا التطابق .واضح أن D_1 هو بيان موجه متصل خالٍ من اللفات عدد رؤوسه $(n - 1)$ ولذلك تكون مرتبة $\bar{B}_2$ هي $(n - 2)$ بموجب فرض الاستقراء الرياضي. وعليه، فان $\bar{B}_2$ يحتوي على $(n - 2)$ من الأسطر المستقلة خطياً. وبذلك فان $\bar{B}_1$ يحتوي على $(n - 1)$ من الاسطر المستقلة خطياً، لأن السطر الأول لايعتمد على بقية الاسطر (لماذا؟). اذاً مرتبة $\bar{B}_1$ لاتقل عن $(n - 1)$ وهكذا فان مرتبة $\bar{B}$ لاتقل عن $(n - 1)$ من ذلك نستنتج أن مرتبة $\bar{B}$ هي $(n - 1)$ وهكذا، بموجب مبدأ الاستقراء الرياضي ، فان المبرهنة صحيحة.

نتيجة $(1 - 2)$: اذا كانت $\bar{B}$ مصفوفة الوقوع لبيان موجه خالٍ من اللفات مكون من p من المركبات و n من الرؤوس، فان مرتبة $\bar{B}$ هي $n - p$.
يترك البرهان تمريناً للطالب.

تمارين $(1 - 5)$

(1) جد مصفوفة التجاور لكل من البيانات المبينة في الاشكال $(1 - 29)$, $(1 - 33)$, $(1 - 34)$.

(2) جد مصفوفة التجاور للبيان $I(G)$ المبين في شكل $(1 - 30)$.وقارن جوابك بمصفوفة الوقوع لحافات G التي اعطيت في الشرح. هل إن مصفوفة الوقوع لحافات أي بيان بسيط G هي مصفوفة التجاور لبيان المناقلة $I(G)$ ؟

(3) جد مصفوفة الوقوع لحافات البيان التام K_4 .

(4) جد مصفوفة الوقوع لكل من البيانات K_4 ، المكعب، $K_{3,2}$.

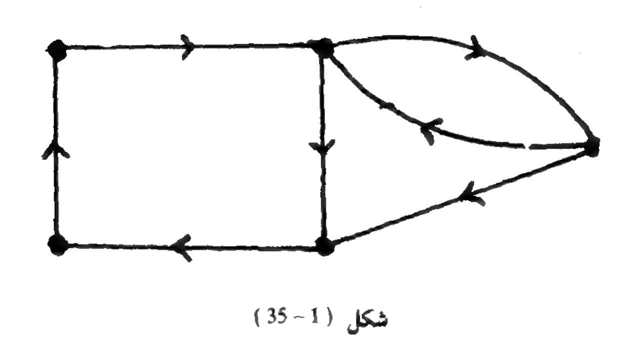
(5) جد مصفوفة الوقوع للبيان الموجه المبين في شكل $(1 - 35)$.

(6) لتكن $\bar{B}$ مصفوفة الوقوع لبيان موجه بسيط D . ولتكن

$$\bar{B}\,\bar{B}' = M = [\,m_{ij}\,],$$

حيث أن $\bar{B}'$ هي مبدول (أومنقول) المصفوفة $\bar{B}$. إثبت أن m_{ii} تساوي درجة الرأس v_i وان m_{ij} ، $i \neq j$ ، تساوي− (عدد الحافات الموجهة التي تصل الرأسين $(v_j , v_i$

(7) إثبت نتيجة (1−2) .

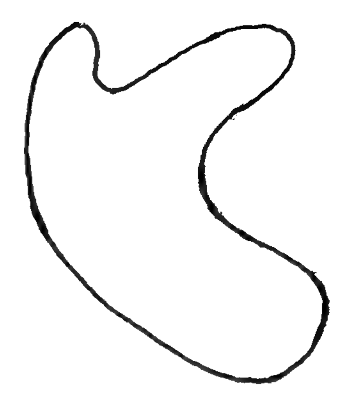


شكل (1 − 35)

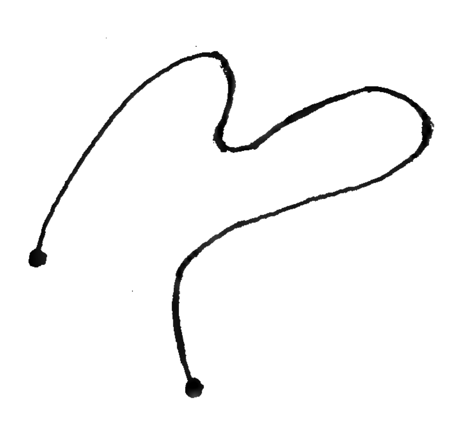
(1 − 7) غمر البيانات (Embeddings of Graphs)

لقد سبق أن ذكرنا أنه يمكن تمثيل أي بيان برسم شكل يتكون من دوائر صلـدة صغيرة تقابل الرؤوس وخطوط أو منحنيات تقابل الحافات، ووجدنا أن هذه الاشكال مفيدة جداً في توضيح العديدمن مفاهيم البيانات. وقد يَسأل القاريء عن المقصود بتمثيل البيان برسم أوبشكل، وهل أن ذلك التمثيل يصح لكل بيان وفي أي فضاء هندسي؟ للأجابة عن ذلك نبدأ بأعطاء تعاريف لبعض المفاهيم ثم نعرف المقصود بغمر بيان مافي فضاء هندسي معين.

يُعرف منحني جوردن المفتوح (open Jordan curve) في المستوي أو الفضاء الاقليدي ذي الابعاد الثلاثة (اوعلى سطح جسم مامثل الكرة أوالطرة) على انه منحنٍ مستمر في السطح لا يقطع نفسه يصل بين نقطتين مختلفتين تسميان نهايتي المنحني.
وبالمثل يعرف منحني جوردن المغلق (closed Jordan curve) على أنه منحنٍ جورداني نهايتاه متطابقتان [إنظر شكل (1 − 36)].



(ب) منحنٍ جورداني مغلق



(أ) منحنٍ جورداني مفتوح

شكل (1 - 36)

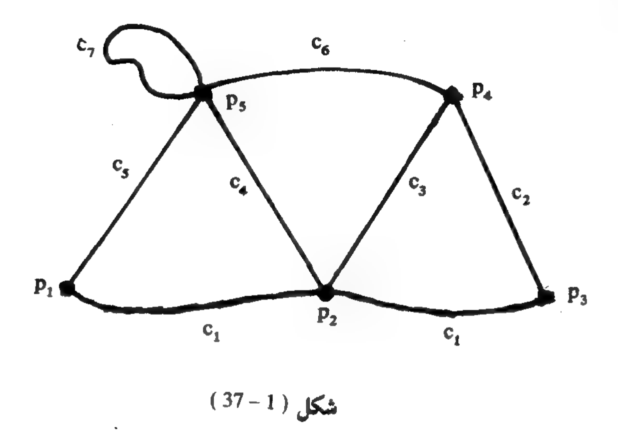
بصورة عامة ، الفضاء S الذي سوف نتكلم عليه فيما ياتي من شرح هو ذلك الفضاء الذي يمكن ان نعرف عليه منحنياً جوردانياً (مفتوحاً أو مغلقاً) . وسوف نركز بالاخص على المستوى الاقليدي والفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد . لانهما الفضاءان اللذان نؤكد هما هنا .

ليكن c_1 و c_2 منحنيين جوردينيين مفتوحين في فضاء S . يقال أن c_1 و c_2 متقاطعان (crossing) اذا وجدت نقطة في S مشتركة بينهما وهي ليست نهاية لاحدهما أو لكليهما . وسوف نستعمل نفس هذا المعنى للتقاطع عندما نتكلم على تقاطع حافتين لبيان ما .

يعرف البيان الهندسي (geometric graph) في فضاء S على أنه مجموعة من نقاط P مع مجموعة C من المنحنيات الجوردانية التي تحقق الشروط الآتية :

(أ) يحتوي كل منحنٍ جورداني مفتوح في C على نقطتين فقط من P . وهاتان النقطتان هما نهايتاه .
(ب) يحتوى كل منحنٍ جورداني مغلق في C على نقطة واحدة فقط من P .
(ج) كل نقطة مشتركة بين منحنيين أو أكثر في C هي نقطة في P .

فمثلاً ، الرسم في شكل(1 – 37)ليس بياناً هندسياً لان المنحني الجورداني المفتوح c_1 يحتوي على ثلاث نقاط من المجموعة $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ ، مما يناقض الشرط (أ) .



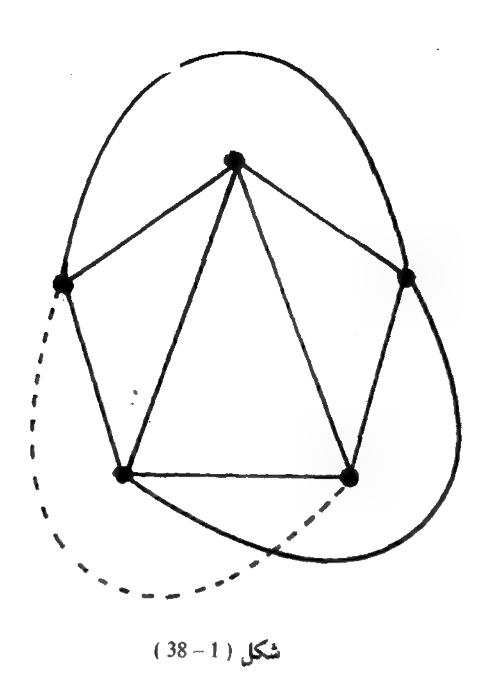
شكل (1 – 37)

نحن الآن مهيؤون لشرح المقصود بالتعبير « غمر بيان في فضاء » . يقال انه يمكن غمر بيان G في فضاء S (اوان G مغمور في S) اذا كان G متشاكلا مع بيان هندسي H في S ، أي يوجد تقابل متباين بين مجموعة رؤوس G ومجموعة نهايات المنحنيات في H ، بحيث ان لكل رأسين v_1 وv_2 في G ، اذا كان

$$v_1 \leftrightarrow p_1 \quad , \quad v_2 \leftrightarrow p_2$$

فان عدد الحافات التي تصل الرأسين v_1 وv_2 في G يساوي عدد المنحنيات الجوردنية التي نهايتا كل منها p_1 وp_2 .

اذا كان G بياناً مغموراً في المستوي ، فانه يمكن تمثيل G هندسياً في المستوي بحيث لايوجد تقاطع بين اية حافتين في نقطة ليست رأساً لاحدى (أوكلتا) الحافتين وعند ذلك نقول لهذا البيان انه بيان مستوٍ (planar graph) وسوف نشرح هذا النوع من البيانات في الفصل الرابع . فمثلاً ، البيان K_4 هو بيان مستوٍ ، ولكن البيان K_5 غير مستوٍ[انظر شكل (1 – 38)] . في الواقع ، لايمكن غمر K_5 في المستوي ، ان هذه نتيجة غير تافهة وسوف يجد لها القارىء برهاناً في الفصل الرابع .



شكل (1 – 38)

مما تقدم نستنتج أن هنالك بيانات لا يمكن غمرها في المستوي . وقد يتوارد الى ذهن القاريء السؤال الآتي : هل توجد بيانات لايمكن غمرها في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ؟ نجيب عن هذا السؤال في المبرهنة الاساسية الآتية .

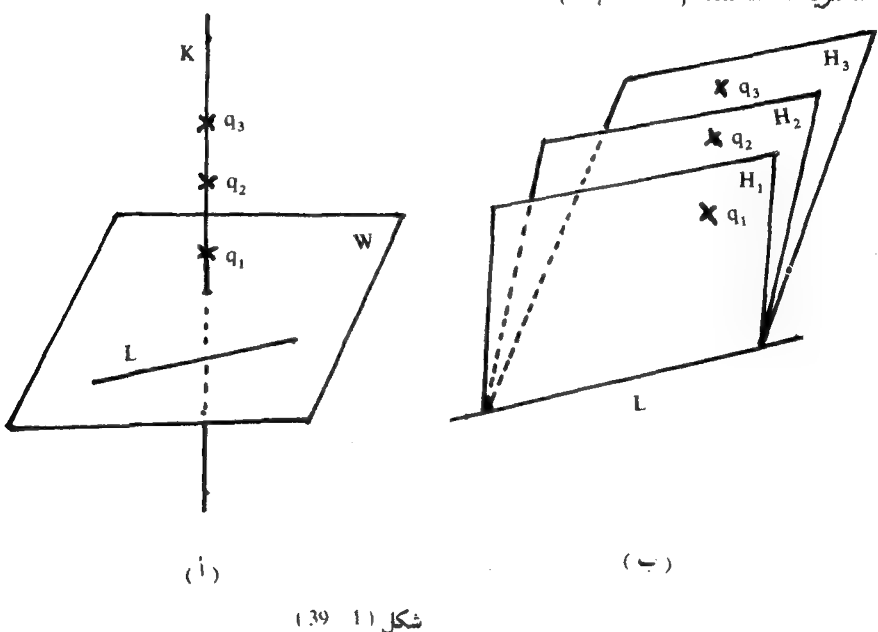
مبرهنة (1 – 3) : كل بيان منتهٍ يمكن غمره في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3

المبرهنة التالية أشمل من هذه المبرهنة .

مبرهنة(1 – 4) : يمكن غمر أي بيان غير منتهٍ ($G= (V, E)$ في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3 ، اذا واذا فقط وجد تقابل متباين بين V ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية ، وكذلك وجود تقابل متباين بين E ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية .

سنعطي البرهان للمبرهنة (1 – 4) وهويشمل اثبات المبرهنة (1 – 3) .

البرهان : ليكن L أي مستقيم في الفضاء الاقليدي R^3 . لما كان هنالك تقابل متباين بين $V = \{ v_i : i \varepsilon \Lambda \}$ ومجموعة جزئيةمن مجموعة الاعداد الحقيقية . فان هنالـك تقابلاً متبايناً بين V وبعض نقاط L ولنفرض أن $v_i \leftrightarrow p_i$ لـكل $i \varepsilon \Lambda$ حيث أن p_i نقطة على L .وان Λ مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة . ليكن W أي مستو يمر بالمستقيم L .وليكن K مستقيماً عمودياً على W ولـكنه لا يقطع L .لما كـان هنالك تقابل بين E ومجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية . فان هنالك تقابلاً متبايناً بين $E = \{ e_i : i \varepsilon \Lambda \}$ وبعض نقاط المستقيم K ولنفرض أن $e_i \leftrightarrow q_i$ لكل $i \varepsilon \Lambda$ حيث أن q_i نقطة على K [انظرشكل (1 - 39 (أ))]. لـكل q_i هنالك نصف - مستوٍ واحد فقط . نرمز له H_i . يمر بالنقطة q_i والمستقيم L الذي يحده [انظر شـكل (1 - 39 (ب))]. وبذلـك فان هنالك تقابلاً متبايناً بيـن E ومجموعة أنـصـاف المستويات المختلفة $\{ H_i : i \varepsilon \Lambda \}$.



شكل (1 - 39)

اذا كان v_j و v_k رأسي الحافة e_i فاننا نرسم منحنياً جوردانياً c_i يصل النقطتيـن P_j و P_k في المستوي H_i ولايمر باية نقطة أخرى من نقاط L .[اذا كان $v_j \neq v_k$ فانـه يمكننا ان نرسم c_i كنصف دائرة قطرها قطعة المستقيم P_jP_k . واذا كان $v_j = v_k$ نأخذ c_i دائرة في H_i تمس L عند النقطة P_j .] واضح انه أصبح لدينا الآن تقابل متباين بين E ومجموعة المنحنيات الجوردانية $\{ c_i : i \varepsilon \Lambda \}$.من طريقة انشاء هذه المنحنيـات

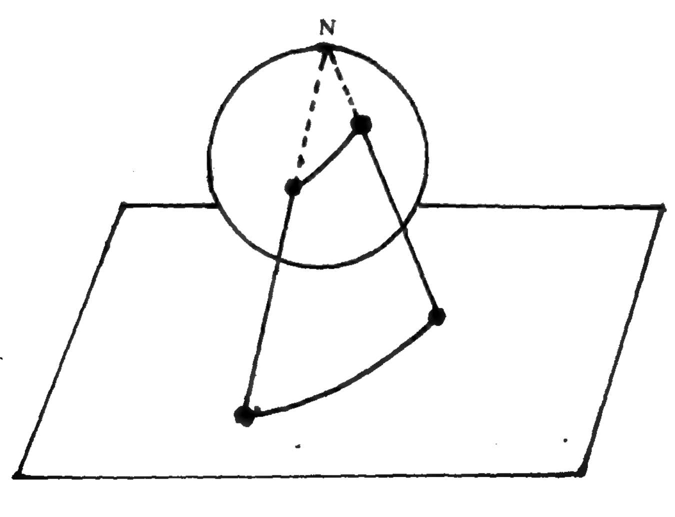
نستنتج أن مجموعة النقاط $\{ p_i : i \varepsilon \Lambda \}$ مع مجموعة المنحنيات $\{ c_i : i \varepsilon \Lambda \}$ تكون بياناً هندسياً H في الفضاء الاقليدي R^3 ، وأن H متشاكل مع البيان G . وبذلك، فانه يمكن غمر G في الفضاء R^3 .

وهكذا ، فانه يمكن رسم أي بيان يحقق شروط المبرهنة (1 - 4) في الفضاء الاقليدي R^3 بدون ان يكون هنالك تقاطع بين أية حافتين منه في نقطة ليست رأساً لأحدى أوكلتا الحافتين.

اذا تأملنا سطح كرة، فانه يمكننا أن نلاحظ أن البيان الذي يمكن غمره في المستوي يمكن غمره أيضاً في سطح كرة، وبالعكس، كل بيان مغمور في سطح كرة هو بيان مستوٍ، كما هو مثبت في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (1 - 5) : يكون البيان G مستوياً اذا واذا فقط أمكن غمره في سطح كرة.

البرهان : لنفرض أن G بيان مغمور في سطح كرة. نضع تلك الكرة على سطح افقي بحيث لايقع قطبها الشمالي N (أي النقطة على سطح الكرة التي تقابل تماماً نقطة تماسها مع المستوي باعتباره أخذ أفقياً) على أية حافة من G . وطبيعي إنه ليس رأساً في G . كما هو موضح في الشكل.

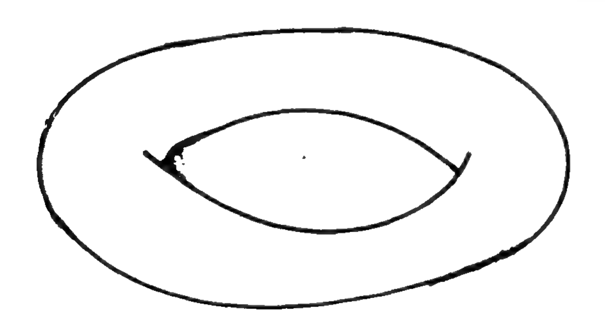


شكل (1 - 40)

نحصل على تمثيل G في المستوي باتباع إسقاط إستريوغرافي (stereographic projection) مركزه نقطة N . فنصل كل نقطة من نقاط حافات G . المرسوم على سطح الكرة. بالنقطة N بمستقيم نمده حتى يلتقي مع المستوي. فنحصل من نقاط التلاقي هذه على اسقاط لـ G على المستوي. نظراً لعدم وجود تقاطع بين أية حافتين من حافات G المرسوم على سطح الكرة. فانه لايوجد تقاطع بين أية حافتين في مسقطه على المستوي. لأن هذا الاسقاط هو في الحقيقة تقابل متباين. لذلك فان G بيان مستوٍ.

اذا كان G بياناً مستوياً. أي مغموراً في المستوي. فاننا نتبع الاسقاط نفسه المذكور آنفاً للحصول على تمثيل لـ G على سطح كرة. وذلك بوصل كل نقطة من حافات G بمستقيم الى نقطة N . مركز الاسقاط. وتكوّن نقاط تقاطع هذه المستقيمات مع سطح الكرة تمثيلاً لـ G على سطح الكرة دون ان يكون هنالك تقاطع بين أية حافتين. وبذلك يمكن غمر G في سطح كرة. ∎

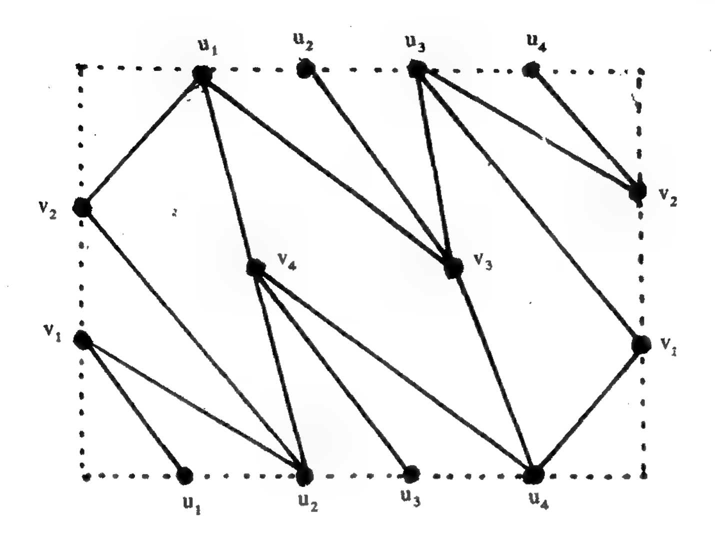
من المبرهنة السابقة نستنتج أنه لايمكن غمر البيانات غير المستوية في سطح كرة. ولكن. هل يمكن غمر بعض البيانات غير المستوية في سطوح أخرى. كسطح الطرة (torus) [إنظر شكل (1 41)]. مثلاً؟ نعم. يمكن غمر بعض البيانات غير المستوية على سطوح أخرى غير سطح الكرة. فمثلاً. يمكن غمر البيانات غير المستوية $K_{4,4}$ و $K_{3,3}$ و K_7 و K_6 و K_5 على سطح الطرة.



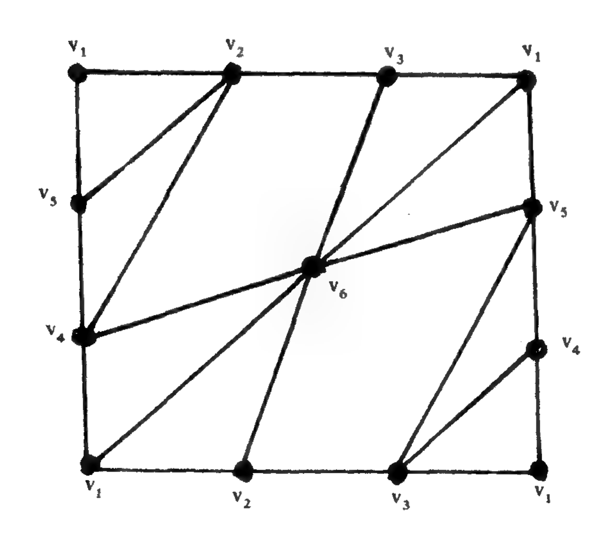
شكل (1 41) : طرة

لاحظ انه يمكن الحصول على سطح طرة من مستطيل بانطباق كل ضلعين فيه. وبالاستفادة من هذه الفكرة. فقد رسمنا $K_{4,4}$ و K_6 على سطح طرة في شكل (1 42). ففي رسم $K_{4,4}$. أخذنا مجموعة الرؤوس مجزأة الى المجموعتين $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. وللتعرف على المزيد من النتائج في هذا الموضوع يمكن للقاريء الاطلاع على المصدر [6].



(ب) غمر $K_{4,4}$ في سطح طرة



(أ) غمر K_6 في سطح طرة

شكل (1 - 42)

تمارين (1 - 6)

(1) إثبت ان كل بيان جزئي من بيان مستوٍ يكون مستوياً.

(2) إذكر كل قيم m وn بحيث يكون البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$ مستوياً.

(3) إثبت بالرسم أنه يمكن غمر كلٍّ من البيانات K_7 ، K_5 ، $K_{3,3}$ في سطح طرة.

(4) يعرف عدد التقاطع (the crossing number) لبيان G بانه أصغر عدد من التقاطعات للحافات [لاحظ بانه لايسمح بتقاطع اكثر من حافتين في نقطة واحدة] عندما يرسم G في المستوي . ويرمز لهذا العدد بـ $\nu(G)$.

واضح أن $\nu(G) = 0$ اذا واذا فقط كان G بياناً مستوياً .

جد $\nu(K_6)$ ، $\nu(K_{3,3})$ ، $\nu(K_5)$.

الدروب والدارات

Chains and Cycles

بعد أن أعطينا العديد من المفاهيم عن البيانات وذكرنا الكثير من انواع البيانات ، يمكننا أن ندرس خصائص البيانات . ولكن ، سنلاحظ اننا كلما شرحنا موضوعاً جديداً نحتاج الى تقديم المزيد من التعاريف للمصطلحات التي سوف تصادفنا لاول مرة . وكما سبق ان أشرنا في بداية الفصل الاول ، فانه لايوجد اتفاق تام على المصطلحات التي سوف نذكرها في هذا الفصل .

(2 – 1) تعاريف : المسارات والدارات والدروب :

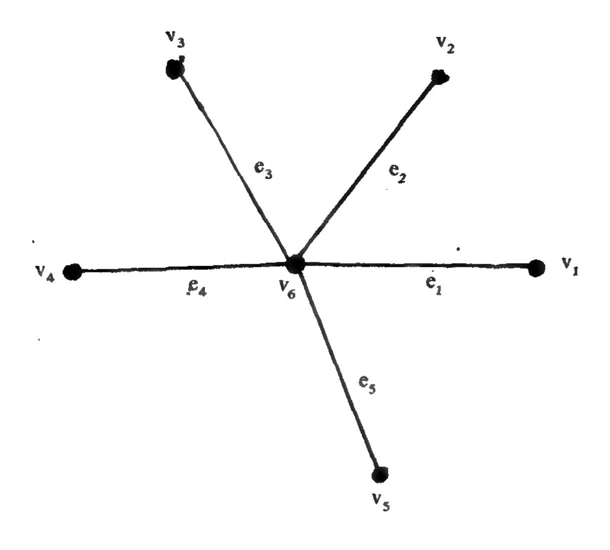
نذكر في هذا المجال المزيد من المفاهيم الاساسية لنظرية البيانات . ليكن $G = (V,E)$ بياناً . يقال ان W مسار (walk) من الرأس v_0 الى الرأس v_n في البيان G اذا كان W متتابعه متناوبة من رؤوس وحافات بالصيغة

$$(v_0 , e_1 , v_1 , e_2 , \dots , e_n , v_n) .$$

بحيث أن كل حافة تقع على الرأس يسبقها مباشرة والرأس الذي يليها مباشرة في هذه المتتابعة . يطلق على v_0 الرأس الابتدائي (initial vertex) . ويطلق على v_n الرأس النهائي (terminal vertex) للمسار W . كما يقال لعدد الحافات n ، طول المسار . واضح ان كل حافتين متتاليتين في المسار W تكونان متجاورتين أو متطابقتين . ومع ذلك ، فان هذه الخاصية ليست كافية لجعل متتابعة من حافات مساراً . فمثلاً ، المتتابعة e_1, e_2, e_3, e_4 من النجمة المبينة في شكل (2 – 1) هي ليست مساراً بالرغم من أن كل حافتين متتاليتين متجاورتين (لماذا؟) . ولكن المتتابعة $e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_4$ من الحافات تكون مساراً من v_1 الى v_4 . وذلك لانه يمكن وضع هذه المتتابعة من الحافات بالصيغة

$$(v_1 , e_1 , v_6 , e_2 , v_2 , e_2 , v_6 , e_3 , v_3 , e_3 , v_6 , e_4 , v_4) .$$

واضح أن في تعريف المسار لا يشترط عدم تكرار الحافات . وبالطبع ، لايشترط عدم تكرار الرؤوس .



شكل (2 - 1)

يقال لمسار W انه مفتوح اذا كان $v_0 \neq v_n$ ويقال انه مغلق اذا كان $v_0 = v_n$.
حيث أن v_0 هو الرأس الابتدائي وان v_n هو الرأس النهائي للمسار W .

يقال ان P درب (chain) من الرأس v_0 الى الرأس v_n في بيان G اذا كـان P مساراً من v_0 الى v_n .

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$,

وكانت حافاته مختلفة. طول الدرب هو عدد حافاته. لاحظ انه قد تكون بعـض رؤوس درب P متكررة. أي لايشترط اختلاف الرؤوس. ولكن. اذا كانت الرؤوس $v_0, v_1, \ldots, v_n$ كلها مختلفة. فعندئذ يقال إن P درب بسيط (simple chain) .

يقال لدرب P من v_0 الى v_n إنه دارة (cycle) اذا كان $v_0 = v_n$. كما يقـال لدارة إنها بسيطة اذا كانت كافة رؤوسها مختلفة. أي كانت بالصيغة.

$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_0)$.

حيث إن الرؤوس $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ كلها مختلفة.

ملاحظـة : لاجـل السهولة والتبسيط سوف نكتب المسارات والـدروب والدارات كمتتابعات لحافاتها فقط على ان نتقيد بالترتيب اللازم للحافات والرؤوس بموجـب التعاريف مبتدئين من الرأس الابتدائي ومنتهين بالرأس النهائي. كما مبين في المثـال

الآتي.

مثال 1 : تأمل البيان في شكل (2 – 2)، تجد أن

$$W_1 = (e_1, e_5, e_6, e_2, e_3, e_4, e_5, e_7)$$

مسار مفتوح من الرأس v_1 الى الرأس v_5 ؛ وأن

$$W_2 = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_5, e_{10}, e_{13})$$

هو مسار مغلق من الرأس v_1 الى الرأس v_1.

وان كلاً من

$$P_1 = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_7),$$

$$P_2 = (e_1, e_{10}, e_{12}, e_8)$$

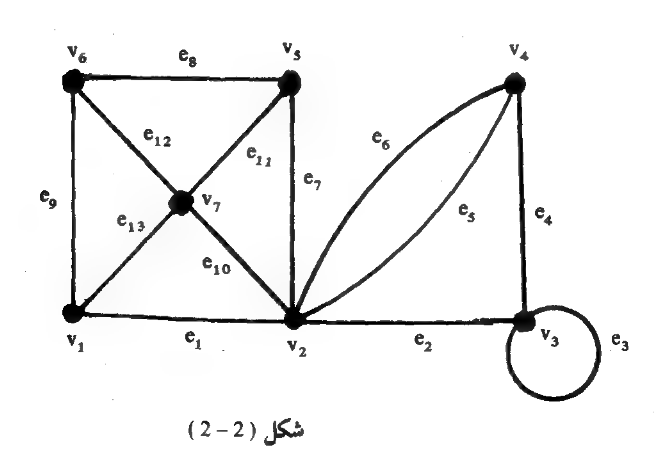
هو درب من v_1 الى v_5 ، واضح أن P_2 بسيط وأن P_1 غير بسيط كما ان كلاً من

$$C_1 = (e_1, e_7, e_8, e_9),$$

$$C_2 = (e_2, e_4, e_6),$$

$$C_3 = (e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_8, e_9)$$

دارة ، وأن C_1 و C_2 دارتان بسيطتان ، أما C_3 فهي دارة غير بسيطة وهي في هذه الحالة مكونة من اتحاد الدارتين البسيطتين C_1 و C_2 . وهذه حقيقة صادقة دائما ، فكل دارة غير بسيطة هي اتحاد دارات بسيطات لاتوجد بين أية اثنتين منها حافة مشتركة [انظر تمرين (4) من مجموعة تمارين (2 – 1)] .



شكل (2 – 2)

يمكن تعريف المسار الموجه (المفتوح أو المغلق) ، الدرب الموجه ، والدارة الموجهة في بيان موجه D بطريقة مشابهة لتعاريف هذه المفاهيم في بيان غير موجه G ، بشرط أخذ الاتجاه للحافات بنظر الاعتبار . ولذلك ، يعرف المسار الموجه في D . بانه متتابعة متناوبة من رؤوس وحافات موجهة بالصيغة

$$(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n),$$

بحيث ان كل حافة موجهة من الرأس الذي يسبقها الى الرأس الذي يليها مباشرة ، اي أن v_{i-1} هو الرأس الابتدائي وان v_i هو الرأس النهائي للحافة الموجهة e_i .
وعندما يكون $v_0 \neq v_n$ يكون المسار الموجه مفتوحا ، وعندما يكون $v_0 = v_n$ يكون المسار الموجه مغلقاً . واذا كانت كل الحافات الموجهة مختلفة فانه يسمى درب موجه (path) . بشرط أن يكون $v_0 \neq v_n$. اما اذا كان $v_0 = v_n$ فعندئذ يصبح دارة موجهة (directed cycle) أو دورة (circuit)

ويعرف الدرب الموجه البسيط بأنه درب موجه كافة رؤوسه مختلفة ، كما أن الدارة الموجهة البسيطة هي دارة موجهة كافة رؤوسها مختلفة .

اذا لم يكن هنالك أي التباس ، فسوف نمثل المسارات والدارات والدروب الموجهة كمتتابعات للحافات الموجهة فقط بدون ذكر الرؤوس لانها تكون مفهومة نصاً من الحافات الموجهة .

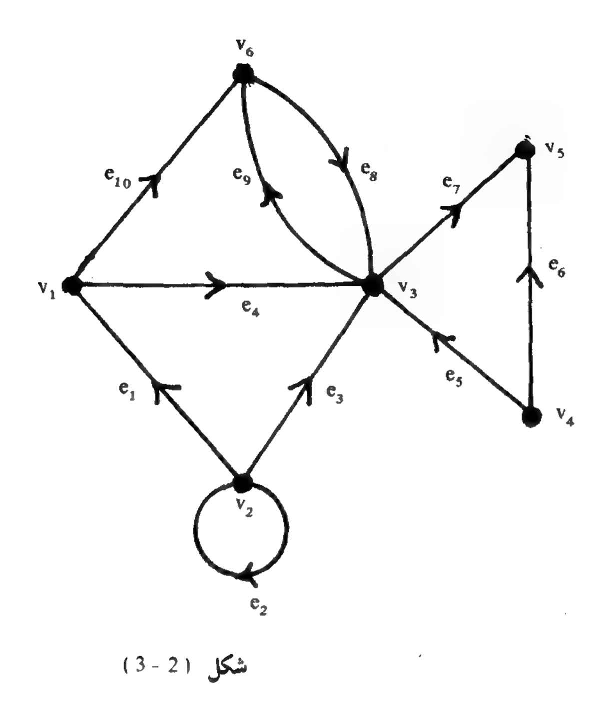
مثال (2) : تأمل البيان الموجه المعطى في شكل (2 - 3) ، تجد أن

$$(e_4, e_9, e_8, e_7)$$

درب موجه من الرأس v_1 الى الرأس v_5 ، وان

$$(e_{10}, e_8, e_7)$$

هو درب موجه بسيط من v_1 الى v_5 ، كما أن (e_8, e_9) هي دارة موجهة بسيطة . بالطبع اللفة e_2 هي دارة موجهة بسيطة . لاحظ أنه لايوجد درب موجه من v_5 الى أي رأس ، كما لايوجد أي درب موجه من أي رأس الى الرأس v_4



شكل (2 - 3)

(2 - 2) الاتصال* (Connectedness)

لقد سبق ان عرفنا في البند (1 - 5) البيان المتصل . وهنا نعطي تعريفا آخر مكافئاً باستخدام مفهوم الدرب .

يقال لبيان G انه متصل اذا واذا فقط وجد درب واحد على الاقل بين كل رأسين في G . ويقال ان G غير متصل اذا احتوى على رأسين لايوجد بينهما أي درب .

هذا التعريف اكثر فائدة من التعريف السابق . وبالطبع . التعريفان متكافئان [انظر التمرين (1) من مجموعة تمارين (2 - 1)] .

يقال لرأسين v و u في بيان G انهما متصلان اذا وجد درب من أحدهما الى الآخر . اذا إعتبرنا أن كل رأس متصل مع نفسه . فاننا نجد أن علاقة الاتصال هذه هي علاقة تكافؤ . لانه اذا كان الرأسان u و v متصلين . وكان الرأسان v و w متصلين . فانه يوجد درب من u الى v . ودرب من v الى w . وبذلك يوجد درب من u الى w . وعليه فان u و w متصلان .

اذا كان $G = (V, E)$ ، فان مجموعة كل الرؤوس في V المتصلة مع بعضها تكوّن مع الحافات الواقعة عليها مركبة لـ G . وبذلك ، فان علاقة الاتصال على V تجزيء G الى مركباته . بالطبع ، هذه التجزئة وحيدة .

المبرهنة الآتية تبين لنا أنه في حالة احتواء البيان غير المتصل على رأسين فقط بدرجة فردية ، فيجب ان يكون هذان الرأسان متصلين . وبذلك يجب أن يقعا في نفس المركبة .

مبرهنة (2 - 1): ليكن G بياناً بسيطاً محتوياً على رأسين فقط ، u و v ، بدرجة فردية . عندئذ يكون الرأسان u و v متصلين .

البرهان : لما كان كل بيان (متصل أو غير متصل) يحتوي على عدد زوجي من الرؤوس ذات الدرجة الفردية [راجع نتيجة (1 - 1)] . فان الرأسين u و v يقعان في مركبة واحدة لـ G . وبذلك ، فان هنالك درباً من u الى v . اذاً ، الرأسان u و v متصلان .

المبرهنة الثانية تزودنا بعلاقة بين عدد رؤوس اي بيان جزئي من بيان متصل G مع عدد مركبات متممة في G .

مبرهنة (2 - 2) : ليكن G بياناً متصلاً ، وليكن H بياناً جزئياً من G . عندئذ يكون عدد مركبات البيان الجزئي المتمم $\bar{H}$ للبيان الجزئي H في G لايزيد على عدد رؤوس H .

البرهان : اذا كان $\bar{H}$ متصلاً ، فان المبرهنة صحيحة . والآن نفرض أن C_1 و C_2 مركبتين في $\bar{H}$. وليكن v_1 رأساً في C_1 ، و v_2 رأساً في C_2 . لما كان هنالك درب P في G بين v_1 و v_2 ، وأنه لايوجد في $\bar{H}$ درب بين v_1 و v_2 ، فان هنالك في هذا الدرب P حافة e_1 موجودة في H وواقعة على رأس في C_1 ، وكذلك توجد حافة e_2 في P موجودة في H وواقعة على رأس في C_2 ، قد يكون $e_1 = e_2$. وبذلك ، فان في كل من C_1 و C_2 رأس واحد على الاقل من H . من هذا نستنتج ان كل مركبة في $\bar{H}$ تحتوي على رأس واحد على الاقل من H . وبذلك عدد مركبات $\bar{H}$ لايزيد على عدد رؤوس H .

في المبرهنة الثالثة نستخرج قيداً أعلى لعدد حافات أي بيان بسيط منتهٍ بدلالة عدد رؤوسه وعدد مركباته .

مبرهنة (2 - 3) : ليكن G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد مركباته k . عندئذ يكون

$$m \leqq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

البرهان : لتكن $H_1 , H_2 , \ldots , H_k$ مركبات G . وان $n_1 , n_2 , \ldots , n_k$ عدد رؤوسها . على الترتيب . بما ان عدد حافات اي بيان بسيط متصل برتبة r لايزيد على $\frac{1}{2} r(r-1)$. فان عدد حافات H_i لايزيد على $\frac{1}{2} n_i(n_i-1)$ وبذلك . فان عدد حافات G لايزيد على

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1)$$

اذا اخذنا بيانين تامين K_t و K_s . بحيث ان $s \geqq t > 1$.وازلنا من K_t رأساً مع الحافات الواقعة عليه واضفناه الى K_s ثم وصلناه بحافة مع كل من رؤوس K_s . نحصل على K_{s+1} و K_{t-1} . وبهذه العملية زاد عدد الحافات بـ $(s-t+1)$ بدون ان يتغير مجموع الرؤوس في البيانين . وبتكرار هذه العملية نحصل على K_{t+s-1} و K_1 . ونتوصل الى نتيجة وهي أن مجموع عدد الحافات في K_{t+s-1} و K_1 يزيد على مجموع عدد الحافات في K_t و K_s .

واضح انه يمكن تطبيق هذه العملية في حالة وجود k من البيانات التامة بحيث نحصل اخيراً على $k-1$ من الرؤوس المعزولة مع بيان تام واحد برتبة $(n-k+1)$. حيث ان n مجموع الرؤوس في كل تلك البيانات التامة . وبعدد من الحافات يزيد على عدد الحافات الاصلية .

مما تقدم نستنتج ان :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \leqq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

وبذلك يتم البرهان . ■

المبرهنة الرابعة تزودنا بالعدد اللازم من الحافات لكي يصبح البيان متصلا .

مبرهنة (2 - 4) : أي بيان بسيط G بـ n من الرؤوس وبأكثر من $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ من الحافات يكون متصلاً .

البرهان : اذا كان G مكوناً من k من المركبات ، فان عدد حافاته لايزيد على $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ بموجب المبرهنة (2 - 3) .ولما كان

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \geqq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

عندما $k \geqq 2$ ، وان عدد حافات G يزيد على $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ بالفرض . فان كون $k \geqq 2$ يناقض المبرهنة (2 - 3) .لذلك ، فان $k=1$ وان G بيان متصل .

المبرهنة (2 - 3) تزودنا بالقيد الاعلى لعدد الحافات لبيان بسيط بدلالة عدد رؤوسه وعدد مركباته .والمبرهنة الآتية تزودنا بالقيد الادنى لعدد الحافات .

مبرهنة (2 - 5) : اذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m ، فان $m \geqq n-1$.

البرهان : لاثبات المبرهنة نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n .

واضح انه عندما يكون $n=1$ ، فان $m=0$. وعندئذ تكون المبرهنة صحيحة .لنفرض ان لكل بيان متصل رتبته r . حيث ان $n-1 \geqq r \geqq 1$.

يحتوي على $(r-1)$ من الحافات على الاقل .وتأمل بياناً بسيطاً متصلاً G عدد رؤوسه n وعدد حافاته m .اذا كانت درجة كل رأس في G لاتقل عن اثنتين فانه بموجب المبرهنة (1 - 1) يكون لدينا

$$2m \geqq 2n,$$

اي ان

$$m \geqq n > n-1 .$$

والان . نفرض ان هنالك في G رأساً u درجته تساوي 1 . فاذا ازلنا الرأس u من G مع الحافة الواقعة عليه . نحصل على بيان متصل G' عدد رؤوسه n' وعدد حافاته m' . حيث ان :

$$m' = m-1, \quad n' = n-1 .$$

وبموجب فرض الاستقرار الرياضي . يكون لدينا

$$m' \geqq n' - 1 .$$

وعليه فان

$$m = m' + 1 \geqq n' = n - 1 .$$

وهكذا . بموجب مبدأ الاستقرار الرياضي . تكون المبرهنة صحيحة . ∎

نتيجة (2 1) : اذا كان G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد مركباته k . فان $m \geqq n - k$.

البرهان مباشر ويترك باعتباره تمريناً للطالب .

مبرهنة (2 – 6) : اذا كان G بياناً بسيطاً خالياً من المثلثات (+) عدد رؤوسه 2n . فان عدد حافاته لايزيد على n^2 .

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على n. فعندما $n = 1$ ، يكون عدد الحافات 0 أو 1 . لان البيان البسيط المكون من رأسين له حافة واحدة على الاكثر . وبذلك . فان المبرهنة صحيحة عندما $n = 1$.

لنفرض أن المبرهنة صحيحة لكل بيان بسيط خال من المثلثات وعدد رؤوسه $2(n - 1)$ ولنأخذ بياناً بسيطاً G خالياً من المثلثات وعدد رؤوسه 2n . لتكن $[u, v]$ حافة في G . وليكن H البيان الناتج من G بازالة الرأسين u و v مع كل الحافات الواقعة عليهما . واضح أن H يحتوي على $2(n - 1)$ رأساً وهو خال من المثلثات . لذلك فان عدد حافاته m' لايزيد على $(n - 1)^2$

اذا كان w أي رأس . غير u و v . في G . فانه لايمكن أن يكون متجاوراً مع u و v معاً . لان G خال من المثلثات . لذلك . اذا كانت درجة u هي k فان درجة v لاتزيد على $(2n - k)$. وعليه . فان m . عدد حافات G . يحقق المتباينة

$$m \leqq (n - 1)^2 + k + (2n - k) - 1 = n^2 .$$

(+) المثلث هو دارة بسيطة طولها يساوي 3 .

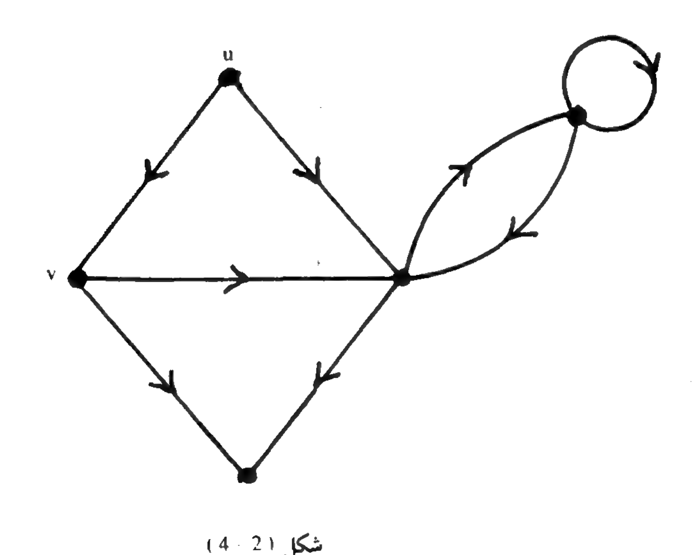
وبهذا يتم البرهان . ■

لاحظ أن هنالك بيانات بسيطة خالية من المثلثات يكون فيها عدد الحافات مساوياً لمربع نصف عدد الرؤوس . خذ مثلاً البيان الذي هو دارة بسيطة بطول 4 . ولذلك . فان n^2 هو أقل قيد أعلى لعدد الحافات لهذا النوع من البيانات . ولهذا السبب يطلق على المبرهنة (2 − 6) المبرهنة القصوى لتوازن (Turan's extremal theorem) .

كما يمكن إثبات أن عدد الحافات m لايزيد على $(n^2 - 1)/4$ عندما يكون البيــان بسيطاً خالياً من المثلثات عدد رؤوسه ، n ، فردياً . [إنظر تمرين (9) من مجموعة تمارين (2 − 1)] .

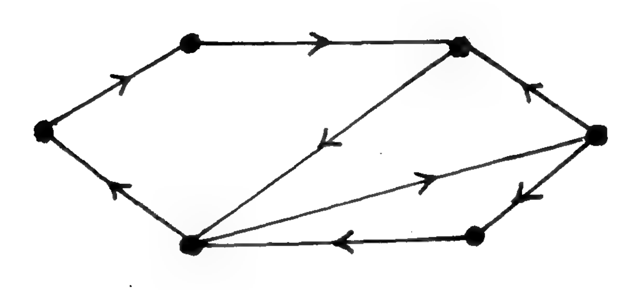
الاتصال للبيانات الموجهة

والآن نقدم فكرة بسيطة عن مفهوم الاتصال للبيانات الموجهة . يقال لبيان موجه D أنه متصل اذا كان اهمال اتجاه الحافات يؤدي الى بيان متصل ، وفيما عدا ذلك فانــه غير متصل . فالبيان الموجه D في الشكل (2 − 4) هو بيان متصل .



شكل (2 − 4)

يقال لبيان موجه D انه متصل بشدة (strongly – connected) اذا كان لكل رأسين مختلفين u و v في D يوجد على الأقل درب موجه واحد من u الى v وكذلك يوجد درب موجه من v الى u . طبيعي أن كل بيان موجه متصل بشدة هو بيان موجه متصل . ولكن العكس غير صحيح . فالبيان الموجه المبين في الشكل (2 – 4) هو متصل ولكنه ليس متصلاً بشدة لعدم وجود درب موجه من الرأس v الى الرأس u. البيان المعطى في الشكل (2 - 5) هو بيان موجه متصل بشدة .



شكل (2 - 5)

قد نستفيد من مفهوم الاتصال بشدة في تثبيت اتجاه السير في شوارع مدينة ما بحيث يصبح السير في كل شارع باتجاه واحد وبحيث نستطيع أن ننتقل طبقاً لذلك من أي موقع الى أي موقع آخر في داخل المدينة . طبيعي أن هذا ليس ممكناً دائماً . الا اذا كانت خارطة شوارع المدينة (وهي التي تشكل بياناً) تحقق شرطاً معيناً . كما هو وارد في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (2 – 7) : ليكن G بياناً متصلاً . يمكن تثبيت اتجاه لكل حافة في G بحيث يصبح البيان الموجه الناتج D متصلاً بشدة اذا واذا فقط كانت كل حافة في G تنتمي الى دارة واحدة على الاقل .

البرهان : اذا أمكن تثبيت اتجاهات للحافات بحيث يصبح D متصلاً بشدة . فانه ينتج مباشرة ان كل حافة في G تنتمي الى دارة واحدة على الاقل .

والان نفرض ان كل حافة في G تنتمي الى دارة واحدة على الاقل . ولتكن C دارة ما. نعطي اتجاهاً لكل حافة في C بحيث تصبح C دارة موجهة . اذا كانت C محتوية على كل حافات G . عندئذ يتم البرهان . اما اذا وجدت حافات لاتقع في C فعندئذ

نأخذ منها حافة e. تكون متجاورة مع حافة في C .لتكن C' دارة تحتوي على e. لكل حافات C' التي لم تأخذ اتجاهاً . نثبت لها نفس الاتجاه . كالاتجاه الذي ينطبق مع اتجاه مرورنا حول الدارة وفقاً لمتابعتها . وهكذا . نستمر بتثبيت اتجاه لكل حافة في G بهذه الطريقة حتى يصبح لدينا بياناً موجهاً .

من السهولة ان نلاحظ ان البيان الموجه الناتج متصل بشده . لان في كل خطوة من خطوات تثبيت اتجاهات الحافات . يكون البيان الموجه الجزئي الناتج . والمكون من الحافات التي تم اعطاؤها اتجاهات . هو بيان متصل بشدة . ■

تمارين (2 − 1) .

(1) اثبت ان تعريف البيان المتصل المعطى في البند (1 − 5) يكافيء تعريفه المعطى في بداية البند (2 − 2) .

(2) لتكن C و C' دارتين مختلفتين في بيان G . ولتكن e حافة مشتركة بين C و C'. اثبت ان هنالك دارة في G لاتحتوي على e.

(3) اثبت ان G بيان ثنائي التجزئة اذا واذا فقط كانت كل داراته زوجية الطول .

(4) برهن على أن كل دارة غير بسيطة يمكن تجزئتها الى دارات بسيطة لاتوجد حافة مشتركة بين أية اثنتين منها .

(5) ليكن G بياناً بسيطاً . برهن على أنه اذا كان G غير متصل فان متممة $\bar{G}$ يكون متصلاً .

(6) ليكن G بياناً بسيطاً متصلاً . برهن على أن بيان المناقلة I (G) يكون متصلاً أيضاً .

(7) يعرف خصر (girth) بيان G بانه الطول لاقصر دارة في G . جد خصر $K_{m,n}$, K_n , W_n وبيان بيترسن .

(8) اثبت النتيجة (2 − 1).

(9) اثبت ان عدد حافات بيان بسيط خالٍ من المثلثات لايزيد على $(n^2 - n)$ عندما يكون عدد رؤوسه $(2n - 1)$.

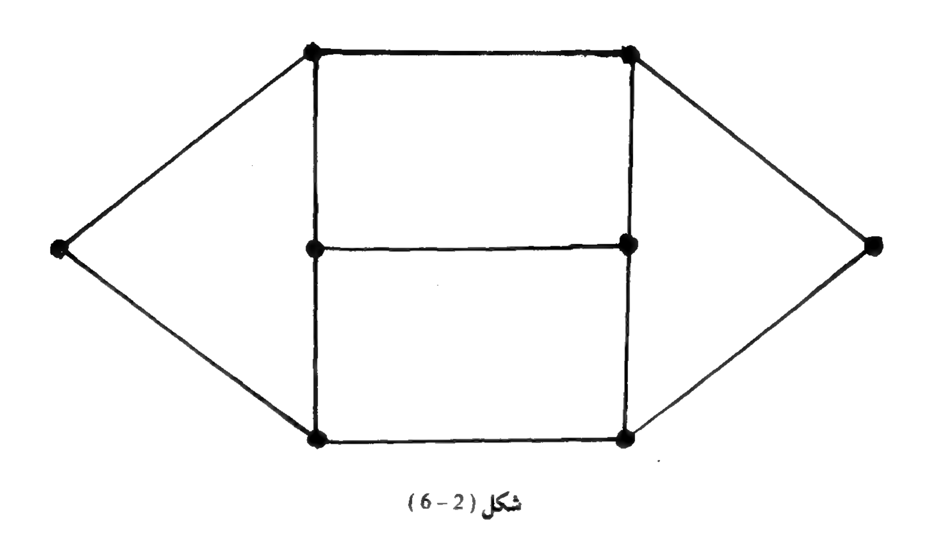
(*10) في بيان متصل بسيط . اثبت أن أي أطول دربين بسيطين يشتركان في رأس واحد على الاقل .

(11) ليكن D بياناً موجهاً بسيطاً ومتصلاً بشدة . وليكن عدد رؤوسه n وعدد حافاته الموجهة m اثبت أن

$$n \leqq m \leqq n(n-1).$$

(12*) اذا كان G بياناً متصلاً عدد رؤوسه (6) ودرجة كل رأس فيه لاتقل عن 3 ، وطول كل دارة لايقل عن 4 ، فاثبت ان $G = K_{3,3}$.

(13) ثبت اتجاهات لحافات البيان G المبين في الشكل (2 – 6) بحيث يتكون لديك بيان موجه متصل بشدة .



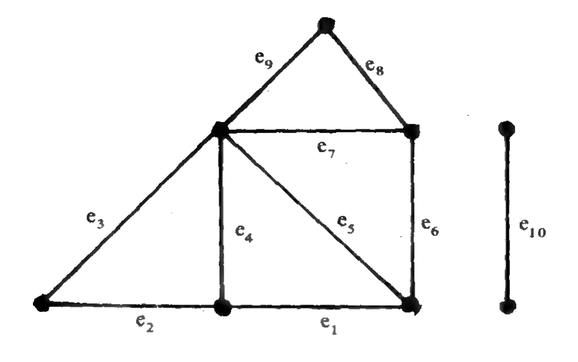
شكل (2 – 6)

(2 – 3) المجموعات القاطعة (The Cut - Sets)

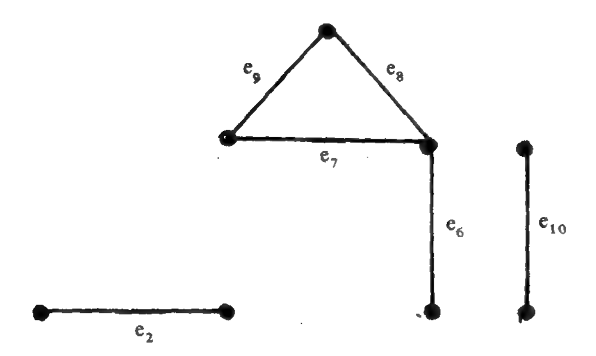
هنالك مفهوم بياني ذو علاقة وثيقة بمفهوم الاتصال ، وهو ذو أهمية كبيرة في نظرية البيانات وتطبيقاتها ، وقد خصصنا هذه الفقرة لشرحه .

ليكن G بياناً . يقال لمجموعة S من حافات G انها مجموعة فاصلة (disconnecting set) لـ G اذا كانت عملية ازالة (*) الحافات التي في S من G تؤدي الى بيان ، نرمز له G – S ، عدد مركباته يزيد على عدد مركبات G . فمثلاً ، مجموعة الحافات $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$ من البيان المعطى في الشكل (2 – 7(أ)) هي مجموعة فاصلة ، لان ازالتها يؤدي الى البيان في الشكل (2 – 7 (ب)) الذي عدد مركباته 3 ، في حين ان البيان في (2 – 7(أ)) له مركبتان فقط .

(*) يُقصد بازالة (removal) حافة هو حذف تلك الحافة من البيان مع ابقاء الرأسين الواقعية عليها .



(أ) البيان G



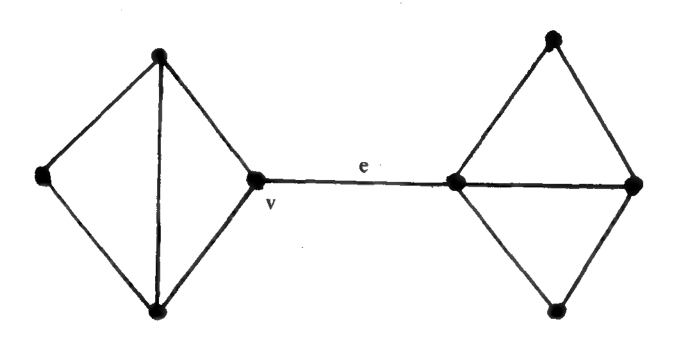
(ب) البيان G – S

شكل (2 - 7)

يقال لمجموعة من حافات G انها <u>مجموعة قاطعة</u> (cut –set) اذا كانت مجموعة فاصلة صغرى . أي أنها مجموعة فاصلة لـ G بحيث لاتوجد مجموعة جزئية فعلية منها التي هي ايضاً مجموعة فاصلة لـ G . فمثلاً . في البيان G في الشكل (2 – 7). مجموعة الحافات $\{ e_1 , e_3 , e_4 , e_5 \}$ ليست مجموعة قاطعة لـ G . لان المجموعة الجزئية الفعلية $\{ e_1 , e_3 , e_4 \}$ هي مجموعة فاصلة أيضاً . ولكن $\{ e_1 , e_3 , e_4 \}$ هي مجموعة قاطعة لـ G . لان اعادة أي من هذه الحافات الثلاث الى موضعه الاصلي في G يؤدي الى بيان له نفس عدد المركبات (اي 2) لـ G .

واضح انه اذا كان G متصلاً وكانت S مجموعة قاطعة لـ G ، فان G − S بيان غير متصل مكون من مركبتين فقط . كما انه اذا كانت S مجموعة قاطعة لبيان G غير متصل ، فان S مجموعة قاطعة لمركبة واحدة فقط من مركبات G .

يُقال لحافة e انها بُرزخ (isthmus) اذا كوّنتْ وحدها مجموعة قاطعة للبيان الذي تنتمي اليه . فمثلاً ، الحافة e في البيان المبين في الشكل (2 − 8) هي بُرزخ .



شكل (2 - 8)

واضح انه اذا كان G بياناً متصلاً ، فان مجموعة كل الحافات ، عدا اللفات ان وجدت ، الواقعة على رأس ، مثل v ، تُشكل مجموعة فاصلة . وهي اما مجموعة قاطعة او اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة عن بعضها مثنى مثنى . فمثلاً ، في البيان المعطى في الشكل (3 − 8) الحافات الواقعة على الرأس v هي اتحاد مجموعتين قاطعتين (ما هما ؟) .

المبرهنة الآتية توضح العلاقة المتينة بين الدارات والمجموعات القاطعة .

مبرهنة (2 − 8) : كل دارة في بيان متصل G تشترك مع أية مجموعة قاطعة لـ G بعدد زوجي من الحافات .

البرهان : لتكن S مجموعة قاطعة للبيان المتصل G ، ولتكن H و H′ مركبتي G − S . واضح ان كل حافة في S تصل رأساً في H برأس في H′ .

لتكن C دارة في G ، وليكن v_0 رأسا واقعا على C . لنفرض ان v_0 في H . اذا كانت كل رؤوس C في H ، فان جميع حافات C هي حافات في H ، وعند ذلك

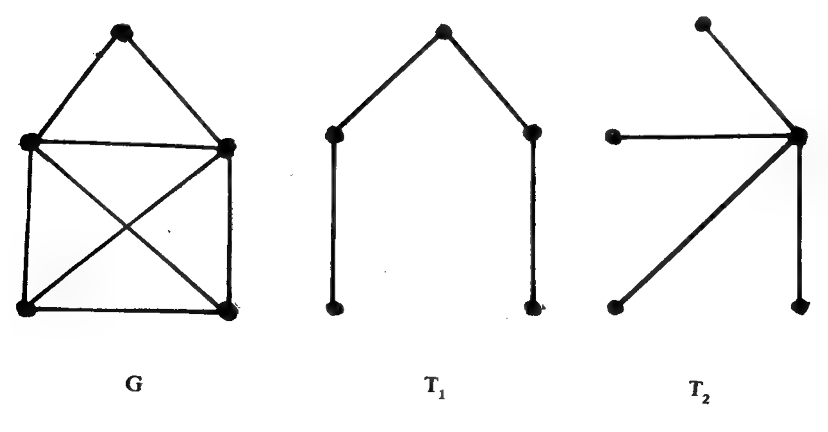
لاتوجد حافات من S مشتركة مع مجموعة حافات C . أما اذا كان هنالك رأس من C في H' ، فاننا عندما نبدأ من v_0 ونمر حول C سوف نعبر من المركبة H الى المركبة H' ، ومن ثم نعود الى H . وهكذا في كل عبور من H الى H' ثم العودة الى H ، نستخدم حافتين مختلفتين من S ؛ لأن حافات C كلها مختلفة . ولما كان علينا العودة أخيرا الى الرأس v_0 الذي هو في H ، فان عدد الحافات المشتركة بين S و C هو عدد زوجي .

يقال لمجموعة قاطعة S لبيان متصل G انها تفصل الرأس u عن الرأس v اذا كان الرأس u يقع في مركبة لـ $G-S$ والرأس v يقع في المركبة الأخرى ، أي لايوجد في $G-S$ أي درب بين u و v .

مبرهنة (2 – 9): ليكن u و v رأسين في بيان متصل G عندئذ كل درب بسيط بين u و v في G يشترك بعدد فردي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة تفصل u عن v .

البرهان مشابه لبرهان مبرهنة (2 – 8) ويترك تمرينا للطالب .

يقال لبيان جزئي T من بيان بسيط منفصل G انه شجرة (tree) اذا كان T متصلا وخاليا من الدارات . واذا احتوت الشجرة على جميع رؤوس البيان G فيقال لها شجرة مولدة (spanning tree) . فمثلا ، في الشكل (2 – 9) ، كل من T_1 و T_2 شجرة مولدة للبيان المعطى G .



شكل (2 – 9)

المبرهنة الآتية تزودنا بعلاقة بين الاشجار المولدة والمجموعات القاطعة لبيان G .

مبرهنة (2 – 10). في بيان متصل بسيط . كل شجرة مولدة تشترك بحافة واحدة على الأقل مع كل مجموعة قاطعة .

البرهان : لتكن T شجرة مولدة و S مجموعة قاطعة لبيان متصل بسيط G. بما ان S – G يتكون من مركبتين H و H′. فان هنالك رأسا u في H ورأسا آخر v في H′ . ومن تعريف الشجرة المولدة . فان هنالك دربا وحيدا في T بين الرأسين u و v . وبذلك فان هنالك حافة واحدة على الأقل تشترك بين T و S [بموجب المبرهنة (2 – 9] . ∎

في تطبيق نظرية البيانات في موضوع شبكات الجريان (أو السيول) نتعامل مع مجموعات قاطعة لبيان موجه . وطبيعي . تُعرّف مجموعة قاطعة لبيان موجه D بأنها مجموعة قاطعة للبيان G الناتج من D باهمال اتجاهات حافاته . واضح . انه اذا كان D متصلاً . وكانت S مجموعة قاطعة لـ D . فان D – S يتكون من مركبتين فقط H و H′. وان حافات S تتجزأ الى مجموعتين C و C′ بحيث ان C تتكون من كل حافات S الموجهة التي تصل من رأس في H الى رأس في H′ . وان C′ تتكون من كل حافات S الموجهة التي تصل من رأس في H′ الى رأس في H . يطلق على C مجموعة قاطعة موجهة من H الى H′ . ويطلق على C′ مجموعة – قاطعة موجهة من H′ الى H .
طبيعي ان البيان الموجه D – C لايحتوي على أي درب موجه من رأس في H الى رأس في H′ . كما ان D – C′ لايحتوي على أي درب موجه من رأس في H′ الى رأس في H .
وهذه الفكرة موضحة في الشكل (2 - 10) .

H H′

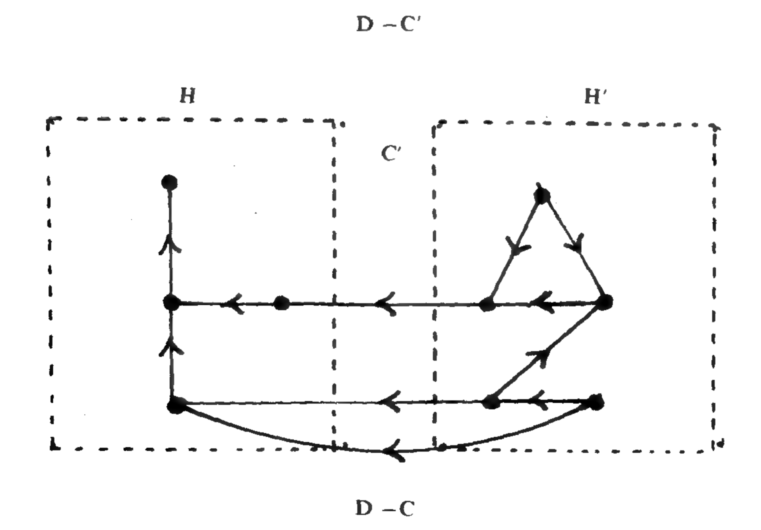
S

D

H H′

C

D − C′



D − C

شکل (2 - 10)

تمارين (2 -2)

(1) اذا كان $G = (V, E)$ بياناً بسيطاً متصلاً . وأن V_1 و V_2 أية تجزئة لـ V . فاثبت أن مجموعة كل الحافات التي تصل رأساً من V_1 برأس من V_2 هي مجموعة قاطعة او اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة مثنى متنى بالنسبة للحافات .

(2) اثبت أن حافة e في بيان G تكون برزخاً اذا واذا فقط e لاتنتمي الى أية دارة في G .

(3) اثبت مبرهنة(2 – 9) .

(4) لتكن S_1 و S_2 مجموعتين قاطعتين مختلفتين لبيان G . ولتكن e حافة موجودة في كل من S_1 و S_2 . اثبت أن هنالك مجموعة قاطعة لـ G لاتحوي الحافة e وهي محتواة في $S_1 \cup S_2$.

(5*) لتكن S مجموعة من حافات بيان متصل G . اذا اشتركت S بعدد زوجي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة لـ G . فاثبت أن S دارة أواتحاد دارات منفصلة متنى مثنى بالنسبة للحافات .

[تلميح : لكل رأس v . الحافات الواقعة عليه تشكل مجموعة قاطعة أو اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة بالنسبة للحافات . وبذلك . فان لكل رأس v من G . يوجد عدد زوجي من حافات S مشتركة مع مجموعة الحافات الواقعة على v . وعليه . فان درجة كل رأس في البيان الجزئي الذي مجموعة حافاته S هي درجة زوجية .]

(6*) لتكن S مجموعة من حافات بيان متصل G . اذا اشتركت S بعدد زوجي من الحافات مع كل دارة في G . فاثبت ان S مجموعة – قاطعة او اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة مثنى مثنى بالنسبة للحافات .

2 – 4) المسافة (The Distance)

قبل ان نبدأ بشرح هذا الموضوع نذكر القارىء باننا افترضنا ان كافة البيانات الموجهة وغير الموجهة والوارد ذكرها في هذا الكتاب هي بيانات منتهية

تعرف المسافة من الرأس u الى الرأس v . $u \neq v$. في بيان G بانها طول أقصر درب من u الى v . ويرمز للمسافة من u الى v بـ $d(u, v)$. بالتعريف $d(u,u) = 0$. واذا كان الرأسان u و v غير متصلين . اي لايوجد درب يصل بينهما . فيقال ان المسافة $d(u,v)$ غير معرفة . ويعبر عن ذلك بكتابة $d(u, v) = \infty$. ولتجنب هذه الحالة . سنفرض ان G بيان متصل .

واضح ان المسافة في البيانات المتصلة . تحقق البديهيات المترية (metric axioms) المعروفة . وهي :

(1) $d(u,v) \geqq 0$,

(2) $d(u,v)=0 \Rightarrow u=v$,

(3) $d(u,v)=d(v,u)$,

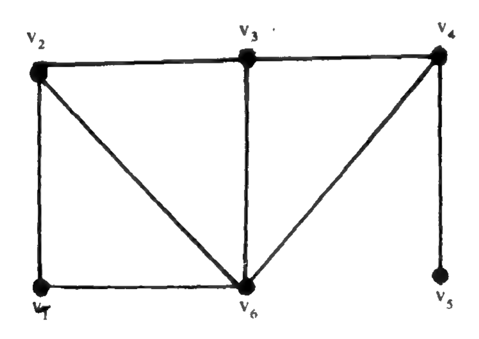
(4) $d(u,v)+d(v,w) \geqq d(u,w)$.

يطلق على البديهة الرابعة المتباينة المثلثية .

يعرف القطر (the diameter) δ . لبيان متصل بسيط $G=(V,E)$ بانه أعظم مسافة $d(u,v)$ بين رؤوس G . أي ان :

$$\delta = \max_{u,v \in V} d(u,v).$$

فالقطر للبيان المعطي في الشكل(2 - 11) هو 3 . وهو المسافة بين الرأسين v_1 وv_5



شكل (2 - 11)

واضح أن قطر K_n هو 1 . وقطر W_n هو 2.
يطلق على الدرب الذي طوله يساوي قطر البيان اسم درب قطري . بالطبع . قد يوجد اكثر من درب قطري واحد لنفس البيان .

كما يعرف مركز (center) بيان متصل بسيط ($G = (V, E)$ بانه رأس يتصف بالخاصية وهي أن المسافة العظمى الممكنة بينه وبين أي رأس آخر هي اقل مايمكن نسبة الى بقية الرؤوس . ويطلق على هذه المسافة نصف القطر، ويرمز لها r . وبذلك ، فان نصف القطر r يحقق

$$r = \min_{v \varepsilon V} R(v),$$

حيث أن

$$R(v) = \max_{u \varepsilon V} d(v, u).$$

يطلق على R (v) الاختلاف المركزي (eccentricity) للرأس v

مما تقدم نجد أن v_0 هو مركز للبيان المتصل الذي نصف قطره r اذا واذا فقط

$$R(v_0) = r.$$

وطبيعي أنه . قد يكون للبيان المتصل اكثر من مركز واحد . ولتوضيح هذا المفهوم نستخرج نصف القطر ومراكز البيان المعطى في الشكل (2 - 11)

$d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 2$,
$d(v_1, v_5) = 3$, $d(v_1, v_6) = 1$, $d(v_2, v_3) = 1$,
$d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_2, v_5) = 3$, $d(v_2, v_6) = 1$,
$d(v_3, v_4) = 1$, $d(v_3, v_5) = 2$, $d(v_3, v_6) = 1$,
$d(v_4, v_5) = 1$, $d(v_4, v_6) = 1$, $d(v_5, v_6) = 2$.

ولأجل تسهيل العمل فقد وضعت هذه المسافات في الجدول الآتي الذي يتضمن أيضاً عموداً لقيم R (v) . والذي منه نستخرج نصف القطر .

$$r = \min_{v} R(v) = \min\{3, 3, 2, 2, 3, 2\} = 2.$$

ونستنتج أن كلاً من الرؤوس v_3, v_4, v_6 هو مركز للبيان المعطى.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	R (v)
v_1	0	1	2	2	3	1	3
v_2	1	0	1	2	3	1	3
v_3	2	1	0	1	2	1	2
v_4	2	2	1	0	1	1	2
v_5	3	3	2	1	0	2	3
v_6	1	1	1	1	2	0	2

من الطبيعي أن تكون هنالك علاقة بين القطر ونصف القطر . وهذا مبين في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (2 - 11) : اذا كان δ قطر بيان متصل بسيط منته $G = (V, E)$. وكان r نصف قطره . فان

$$\frac{1}{2}\delta \leq r \leq \delta .$$

البرهان : لما كان

$$\delta = \max_{u, v \in V} d(u, v),$$

$$r = \min_{u \in V} \{ \max_{v \in V} d(u, v) \} .$$

فان

$$r \leq \max_{u \in V} \{ \max_{v \in V} d(u, v) \} = \delta .$$

لتكن x و y نهايتي درب قطري . أي أن $\delta = d(x, y)$ وليكن v_0 مركزاً للبيان G . عندئذ يكون $r = R(v_0) = \max_{v \in V} d(v_0, v)$.

اذاً

$$d(v_0, x) \leq r , \quad d(v_0, y) \leq r .$$

ولما كان

$$d(x, y) \leq d(x, v_0) + d(v_0, y) .$$

فان

$$\delta \leq r + r .$$

أي أن

$$\frac{1}{2}\delta \leq r .$$

وبذلك يتم البرهان ■

✽ ليكن r نصف قطر بيان متصل بسيط $G = (V, E)$. ولتكن p أعلى درجة رأس في G . أي أن

$$p = \max_{v \in V} \deg(v) :$$

ولنفرض أن $p \geq 2$. ليكن u مركزاً لـ G . ولتكن A_1 مجموعة كل الرؤوس في G المتجاورة مع u . ولتكن A_2 مجموعة كل الرؤوس التي مسافة كل منها عن u تساوي 2 . وهكذا . لتكن A_i مجموعة كل الرؤوس في G التي مسافة كل منها عن u تساوي i . حيث ان $i = 1, 2, \ldots, r$.

واضح أن عدد الرؤوس في A_1 لايزيد على p . وأن هنالك أقل من p من الحافات من كل رأس في A_1 الى مجموعة الرؤوس في A_2 . وبذلك فان عدد الرؤوس في A_2 هو أقل من p^2 . وهكذا . فان عدد الرؤوس في A_i هو أقل من p^i . لكل $i = 1, 2, \ldots, r$. وعليه . فان

$$n \leq 1 + p + p^2 + \dots + p^r ,$$

حيث ان n عدد رؤوس البيان G. ولما كان

$$1 + p + p^2 + \dots + p^r = (p^{r+1} - 1) / (p - 1) ,$$

فان

$$n \leq (p^{r+1} - 1) / (p - 1) ,$$

أي ان

$$n (p - 1) + 1 \leq p^{r+1}$$

اذاً

$$\log (np - n + 1) \leq (r + 1) \log p .$$

وهكذا ، نحصل على العلاقة الاتية

$$r \geq \frac{\log (np - n + 1)}{\log p} - 1 . \qquad \dots (1 - 2)$$

والان نشرح موضوع المسافة في البيانات الموجهة .

ليكن $D = (V, A)$ بياناً موجهاً .اذا وجد درب موجه من الرأس u الى الرأس v في D . فعندئذ نعرف المسافة الموجهة . والتي يرمزلها $\vec{d} (u, v)$ من الرأس u الى الرأس v بانها طول أقصر درب موجه من u الى v .
واذا لم يكن هنالك أي درب موجه من u الى v في D .فيقال ان المسافة الموجهة $\vec{d} (u, v)$ غير معرفة . ونعبر عن ذلك بكتابة $\vec{d} (u, v) = \infty$.
كما ان لكل رأس u في D نعرف $\vec{d} (u, u) = 0$ طبيعي أن .المسافة الموجهة $\vec{d}$ لا تحقق خاصية التناظر بصورة عامة . اي أن

$$\vec{d} (u, v) \neq \vec{d} (v , u) .$$

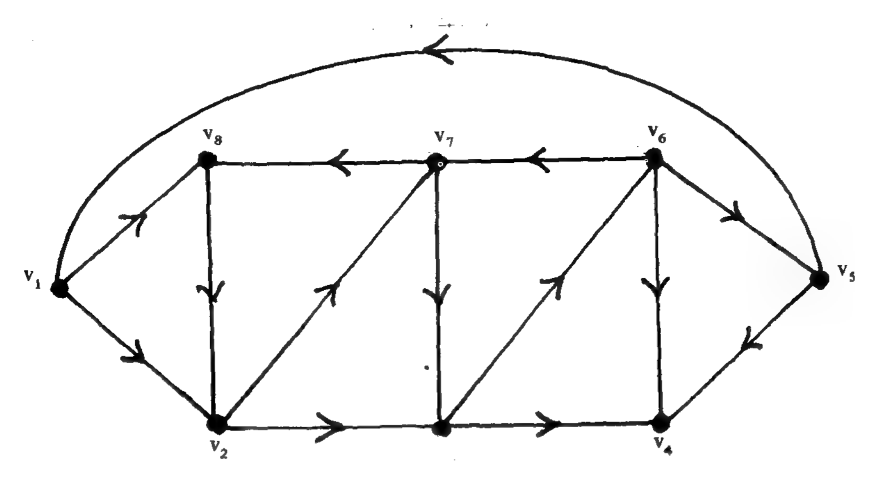
ولكن من السهولة اثبات صحة المتباينة المثلثية

$$\vec{d} (u , v) + \vec{d} (v, w) \geq \vec{d} (u, w) .$$

لانه .اذا وجد درب موجه من u الى v ودرب موجه من v الى w . فان هنالك درباً موجهاً من u الى w .

مثال : تأمل البيان الموجه D المعطي في الشكل (2 - 12). تجد ان

$\vec{d}(v_1, v_6) = 3, \quad \vec{d}(v_6, v_1) = 2, \quad \vec{d}(v_7, v_4) = 2, \quad \vec{d}(v_4, v_7) = \infty .$



شكل (2 - 12)

يمكننا ان نعرف القطر ، نصف القطر ، والمركز لبيان موجه بطريقةمشابهة لتعريفها للبيانات غير الموجهة مع أخذ $\vec{d}(u, v)$ بدلاً من $d(u, v)$. ولاجل تجنب وجود مسافة موجهة غيرمعرفة بين راسين ، فسوف نفترض ، عند بحث القطرونصف القطر ان البيان الموجه هوبيان متصل بشدة .ولتجنب الالتباس ، سوف نرمز بـ $\vec{\delta}$ للقطر و $\vec{r}$ لنصف القطر لبيان موجه .وهكذا ، اذا كان $D = (V, A)$ بياناً موجهاً بشدة ، فاننا نعرف

$$\vec{\delta} = \max_{u, v \varepsilon V} \vec{d}(u, v),$$

$$\vec{r} = \min_{u \varepsilon V} \vec{R}(u),$$

حيث ان

$$\vec{R}(u) = \max_{v \varepsilon V} \vec{d}(u, v).$$

واذا كان $\vec{R}(u_o) = \vec{r}$ ، فيقال ان u_o مركز البيان الموجه D .

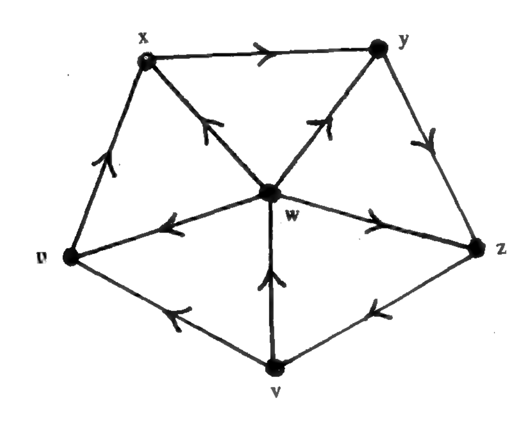
بما ان المسافة الموجهة $\vec{d}$ ليست متناظرة بصورة عامة ، فاننا نتوقع عدم صحة المتباينة $\frac{1}{2}\vec{\delta} \leqq r \leqq \vec{\delta}$ أَحياناً ، وذلك لان برهان المبرهنة (2 - 11) يتطلب استخدام خاصية التناظر لدالة المسافة d .ولاجل توضيح هذه

النقطة ، تأمل البيان الموجه المبين في الشكل (2 - 13) تجده متصلا بشده ، وتجد ان

$$\vec{R}(u) = \max\{1, 2, 3, 4, 5\} = 5,$$
$$\vec{R}(v) = \max\{1, 1, 2, 2, 2\} = 2,$$
$$\vec{R}(w) = \max\{1, 2, 1, 1, 1\} = 2,$$
$$\vec{R}(x) = \max\{4, 3, 4, 1, 2\} = 4,$$
$$\vec{R}(y) = \max\{3, 2, 3, 4, 1\} = 4,$$
$$\vec{R}(z) = \max\{2, 1, 2, 3, 3\} = 3.$$

وهكذا ، فان

$$\vec{\delta} = \max\{5, 2, 2, 4, 4, 3\} = 5,$$
$$\vec{r} = \min\{5, 2, 2, 4, 4, 3\} = 2$$



شكل (2 - 13)

وبذلك ، فان في هذا البيان الموجه $\vec{\delta} > 2\vec{r}$. لاحظ أن كلاً من الرأسين v و w هو مركز لهذا البيان .

تمارين (2 - 3)

(1) جد القطر ونصف القطر لكلٍ من بيان بيترسن والبيان الثماني السطوح .

(2) في بيان متصل G ، اثبت أن رأسا x يقع على أقصر درب بين الرأسين u و v اذا واذا فقط

$$d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)$$

(3) ليكن P_n بياناً برتبة n مكوناً من درب بسيط واحد . جد القطر ونصف

القطر لـ P_n وعين مراكزه . [تلميح : خذ الحالتين (أ) n عدد زوجي ، (ب) n عدد فردي .]

(4) لتكن C_n دارة بسيطة عدد رؤوسها n . جد القطر ونصف القطر لـ C_n وعين مراكزها .

(5) اثبت ان G بيان تام اذ او اذا فقط قطره يساوي 1 .

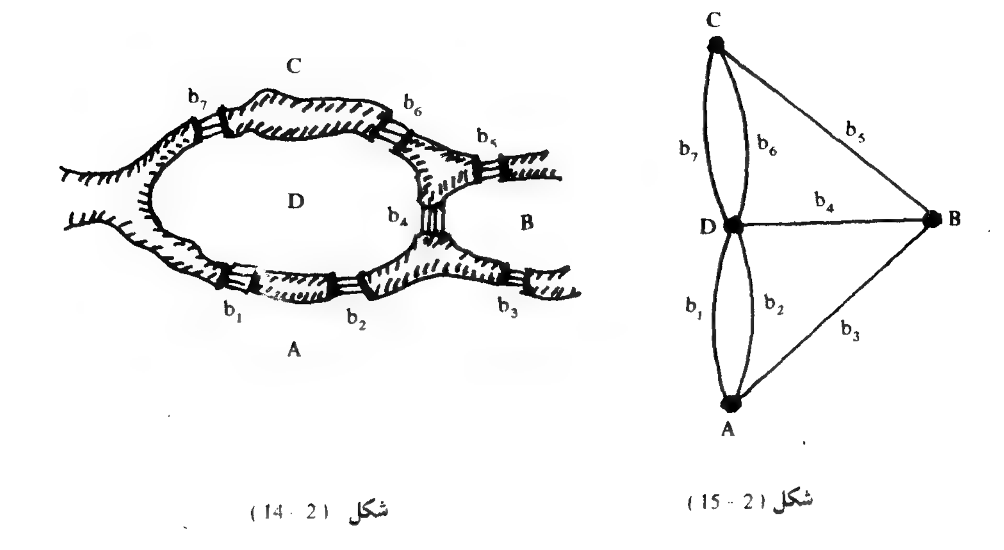
(6) اذا كانت T شجرة عدد رؤوسها $n \geq 3$ ، فاثبت ان قطرها δ ونصف قطرها r يحققان المتباينة $\delta > r$.

(7) جد نصف القطر $\vec{r}$ والقطر $\vec{\delta}$ للبيان الموجه المتصل بشدة والمعطى في الشكل (2 - 5) . عين مراكزه .

(2 – 5) البيانات الأويلرية (Eulerian Graphs)

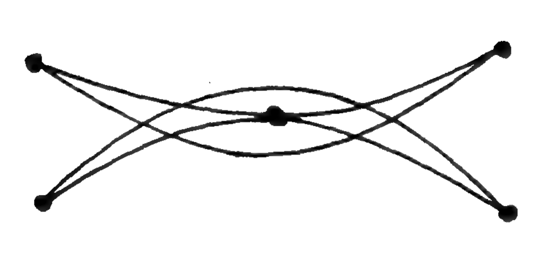
لقد كانت مسألة جسر كونيكسبرك (Konigsberg Bridge Problem) البداية لرياضيات نظرية البيانات . وقد كان العالم أويلر أول من أعطى جوابا لهذه المسألة في سنة 1736 . لقد كانت خارطة مدينة كونيكسبرك في المانيا كما هي مبينة في الشكل (2 - 14) . وهي تحتوي على سبعة جسور . وتنص المسألة على ايجاد مسار يبدأ من نقطة في اليابسة . كنقطة A مثلاً . ويعبر على كل جسر من الجسور السبعة مرة واحدة فقط ثم يعود الى نفس النقطة A . لما كان المهم في هذه المسألة هو الجسور . فانه يمكن تمثيل خارطة المدينة ببيان حافاته تمثل الجسور وكل جزء من الاجزاء اليابسة المنفصلة بعضها عن بعض يتمثل برأس واحد في البيان . كما هو مبين في الشكل (2 - 15) . وبذلك تصبح مسألة جسر كونيكسرك بالصيغة الآتية : هل توجد دارة تحتوي كل حافات البيان في الشكل (2 – 15) ؟ وقد اجاب اويلر عن ذلك بالنفي . كما سيتضح من المبرهنة (2 - 12)

وقد ظهر أن مسائل التسلية . التي تؤدي الى ايجاد درب أو دارة تتضمن كل الحافات . كانت قديمة جداً . فالبيان المبين في الشكل (2 - 16) الذي يطلق عليه حداب محمد (Mohammed's scimitars) كان قد أوجده العرب للتسلية على النحو الآتي : هل يمكن رسم هذا الشكل بدون رفع القلم عن الورقة ؟



شكل (2 - 14)

شكل (2 - 15)

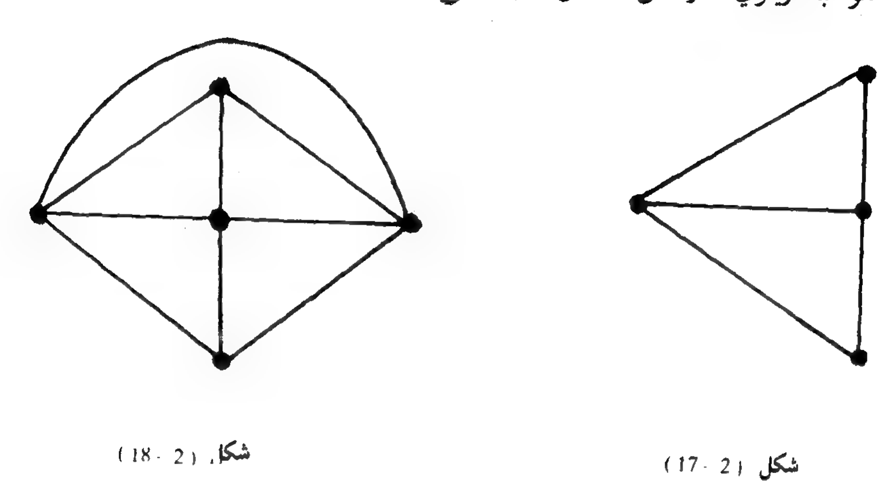


شكل (2 - 16) جداب محمد

ليكن G بياناً متصلاً . اذا وجد في G درب مغلق يمر بكل حافات G ، فانه يطلق على ذلك الدرب اسم درب اويلري (Eulerian chain) ، ويقال عندئذ لـ G انه بيان أويلري . واضح أن أي درب أويلري هو في الحقيقة دارة محتوية على كل حافات البيان . ولذلك فالاجدر ان يطلق عليها دارة أويلرية . ولكن أويلر سماها درباً مغلقاً . واصبحت التسمية « درب أويلري » معروفة في كل الكتب والمقالات في موضوع نظرية البيانات .

البيان جداب محمد هوبيان أويلري . ولكن البيان في الشكل (2 - 17) ليس كذلك . حيث لايمكن ايجاد درب أويلري فيه .

يقال لبيان متصل منتهٍ G انه بيان **شبه أويلري** (semi – Eulerian) اذا وجد فيه درب (مفتوح أو مغلق) يمر مرة واحدة فقط في كل حافة من حافات G. فالبيان في الشكل (2 – 18) هو بيان شبه أويلري. لاحظ أن كل بيان أويلري هو شبه أويلري، ولكن العكس غير صحيح بصورة عامة.



شكل (2 - 18)

شكل (2 - 17)

السؤال الذي يتبادر الى الذهن هو: ماهي الشروط الضرورية والكافية التي تتوفر في البيانات لكي تكون أويلرية؟ لقد أجاب أويلر عن هذا السؤال في المبرهنة الآتية.

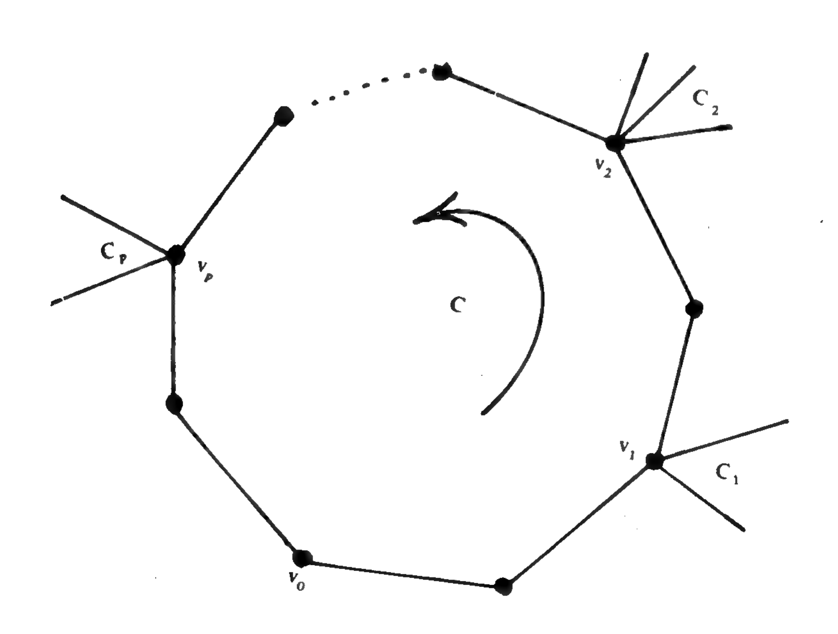
مبرهنة (2 – 12): يكون البيان المتصل G بياناً أويلرياً اذا واذا فقط كانت درجة كل راس في G عدداً زوجياً.

البرهان: اذا كان G بيانا اويلرياً. فانه يوجد درب أويلري يمر بكل الحافات. وفي كل مرة نمر برأس نستعمل حافتين مختلفتين واقعتين عليه. وبذلك فان درجة كل رأس في G هي عدد زوجي. وعليه. فان هذا الشرط ضروري لكي يكون البيان المتصل أويلرياً.

والآن نبرهن على أن هذا الشرط كاف. ولاجل ذلك نفرض أن درجة كل رأس في G هي درجة زوجية. ونبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الحافات أن G بيان أويلري. واضح أنه اذا كان G مكوناً من حافة واحدة فقط. فعندئذ يكون G لفة واحدة وهو بذلك بيان أويلري.

يمكن أن نثبت بسهولة أن البيان الذي درجة كل رأس فيه لاتقل عن اثنين يحتوي على دارة . [انظر تمرين (4) من مجموعة تمارين(2 – 4)]. وهكذا ، فان هنالك دارة C في G . لما كانت درجة كل رأس في C هي درجة زوجية ، فان درجة كل رأس في البيان الجزئي المتمم $\bar{C}$ ، اي $G - C$ ، هي أيضاً درجة زوجية . اضافة الى ذلك ، فان كل مركبة لـ $\bar{C}$ تحقق هذا الشرط . اذا ، بموجب فرض الاستقراء الرياضي ، كل مركبة لـ $\bar{C}$ ، ماعدا الرؤوس المنعزلة التي وجودها في $\bar{C}$ لايؤثر على خطوات البرهان الآتية ، هي بيان أويلري .

لما كان G متصلاً ، فان كل مركبة لـ $\bar{C}$ تشترك مع C برأس واحد على الاقل . ليكن v_0أي رأس واقع على C . لنبدأ من v_0 وندور حول C باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة [انظر شكل (2 – 19)] ونرمز بـ v_1 لاول رأس من C يشترك مع مركبة لـ $\bar{C}$ ، والتي سنرمز لها C_1 وهي درب أويلري . ونرمز بـ v_2 للرأس الذي يأتي بعد v_1 ويشترك مع مركبة اخرى ، والتي سنرمز لها بـ C_2، وهكذا نرمز بـ v_p لآخر رأس من C يشترك مع آخر مركبة C_p .



شكل (2 – 19)

اذا رمزنا بـ $P(x,y)$ للدرب المفتوح من x الى y (باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة) في الدارة C ، فان

$$P(v_0, v_1), C_1, P(v_1, v_2), C_2, \ldots, C_p, P(v_p, v_0)$$

هي دارة في G تمرمرة واحدة فقط في كل حافة من حافات G ؛ وبذلك فهي درب أويلري في G . اذاً ، G هو بيان أويلري. ■

نتيجه (2 - 2): يكون البيان المتصل G بياناً شبه أويلرياً اذا واذا فقط لايوجد فيه اكثر من رأسين فرديي الدرجة .

يترك البرهان تمريناً للقاريء.

اذا كان G بياناً أويلرياً ، فانه يمكن الحصول على درب أويلري لـ G باتباع الطريقة الآتية التي تسمى خوارزمية فلوري (Fleury's algorithm) :

نبدأ بأي رأس ، مثل u ، ونمرعلى الحافات بترتيب كيفي حسب القواعد :-

(1) نزيل كل حافة نمرعليها ؛ (2) نزيل كل راس معزول ينتج بتطبيق خطوات الطريقة ؛ (3) في كل مرحلة ، لانستعمل برزخاً الا في حالة عدم وجود حافة اخرى تقع على الرأس الذي وصلنا عنده.

يمكن أن نبرهن على أن خوارزمية فلوري تمكننا دائماً من ايجاد درب أويلري في بيان أويلري . فاذافترضنا أننا وصلنا الى رأس v وكان $u \neq v$ ، فان البيان الباقي H هو بيان متصل ويحتوي على رأسين فقط بدرجة فردية وهما u و v . وبذلك بموجب نتيجة (2 - 2) نستطيع ايجاد درب شبه أويلري من v الى u ، أي نستطيع الاستمرار بخطوات الخوارزمية . اما اذا كان $u = v$ ولايزال هنالك حافات باقية واقعة على u ، فاننا نستطيع أيضاً الاستمرار بخطوات الخوارزمية . واخيراً ، اذا كان $u = v$ ولم تبق هنالك حافات واقعة على u ، فانه لن تبقى أية حافة اخرى في G ، وذلك بموجب القاعدة (3) ولأن لكل رأس v ، فان آخر حافة تستعمل ، من الحافات الواقعة على v ، هي في الحقيقة برزخ

أن موضوع التغطية الصغرى (minimal covering) هو تعميم لمسألة أويلر. ويقصد بالتغطية الصغرى لبيان متصل G تجزئة حافاته الى أقل عدد من الدروب والدارات المنفصلة بعضها عن بعض بالنسبة للحافات ، أي التي لاتوجد حافات مشتركة بين أي

اثنين منها وبحيث انها تتضمن سوية كل حافات G ، أي تغطي G . المبرهنة الآتيـة تعطينا عدد الدروب والدارات في تغطية صغرى لبيان متصل .

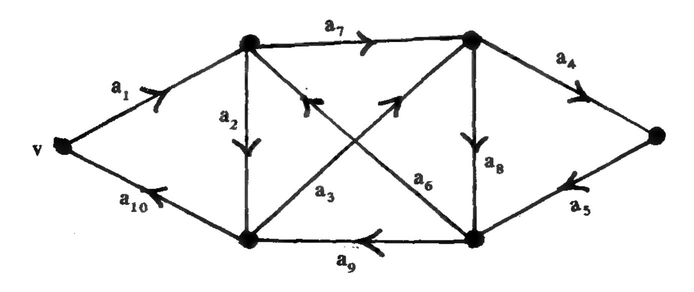
مبرهنة(2 – 13): ليكن G بياناً متصلاً محتوياً على 2k ، $k \geqq 1$ ، من الرؤوس الفردية الدرجة . عندئذ ، كل تغطية صغرى لـ G تتكون من k من الدروب المنفصلة بالنسبة للحافات .

البرهان : واضح أن كل رأس فردي الدرجة يجب أن يكون نهاية لدرب واحد على الاقل في كل تغطية لـ G . وعليه ، فان عدد الدروب في أية تغطية (صغرى أوغير صغرى) لـ G لايقل عن k . والآن نبين أنه يمكن تغطية G بـ k من الدروب المنفصلة بالنسبة للحافات بحيث أن نهايتي كل من هذه الدروب رأسان كل منهما فردي الدرجة.

ليكن G البيان الناتج من G باضافة k من الحافات ، $e'_1 , e'_2, \ldots ,e'_k$، بحيث إن كل حافة تصل رأسين كل منهما فردي الدرجة ،و بحيث إن كل رأس فردي الدرجة يقع على واحدة فقط من هذه الحافات المضافة . بموجب المبرهنة(2 – 12)فان G' هو بيان أويلري . وعليه ، فان هنالك في G' درباً أويلرياً ، P' . عندما نزيل الحافات المضافة $e'_1 , e'_2 , \ldots e'_k$ من P' ، فان الحافات الباقية ، وهي كل حافات G ، تتجزأ الى k من الدروب التي تغطي G .

يمكن تعميم المفاهيم والنتائج التي تقدم ذكرها في هذا المجال لتشمل البيانات الموجهة ، ونشرح فيما يأتي بعضا منها .

يقال لبيان موجه $D = (V, A)$ انه بيان اويلري موجه (directed Euler graph) اذا وجدت فيه دارة موجهة مكونة من كل حافاته الموجهة . فمثلا ، البيان الموجه المبين في الشكل(2 – 20) هو بيان اويلري موجه ، وذلك لأن المتتابعه $(a_1 , a_2 , \ldots , a_{10})$



شكل (2 – 20)

هي دارة موجهة تبدأ من v وتنتهي في v .

المبرهنة الآتية تعين لنا الشرط الضروري والكافي لكي يكون D بيانا أويلريا موجهاً.

مبرهنة (2 − 14) : ليكن $D = (V, A)$ بيانا موجها متصلا . عندئذ ، يكون D بيانا أويلريا موجها اذا واذا فقط

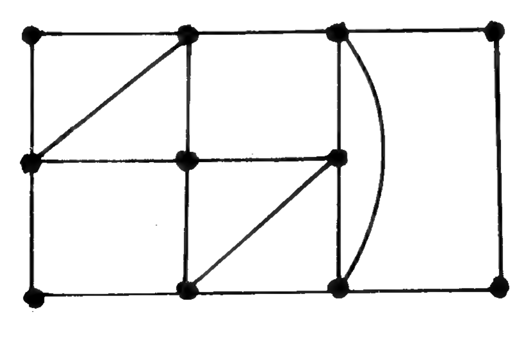
$$\rho^+(v) = \rho^-(v),$$

لكل رأس v في D .

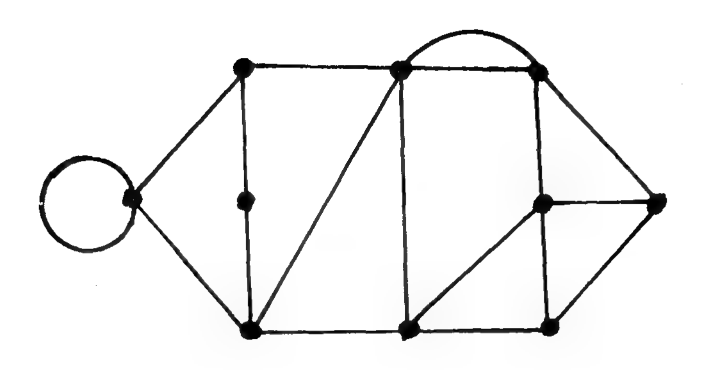
البرهان مشابه لبرهان مبرهنة(2 − 12) ، وقد ترك كتمرين للقارىء .
[أنظر التمرينين (10) و (11) من مجموعة تمارين (2 − 4)] .

تمارين (2 − 4)

(1) ماهي قيم m و n بحيث يكون $K_{m,n}$ بيانا اويلرياً ؟ هل يمكن ان يكون W_n بيانا أويلرياً ؟ ولماذا ؟
(2) اثبت النتيجة (2 − 2).
(3) برهن على أن بيانا متصلا G يكون أويلريا اذا واذا فقط أمكن تجزئة عائلة حافاته الى دارات منفصلة بالنسبة للحافات مثنى مثنى .
(4) اذا كان G بيانا فيه درجة كل رأس لاتقل عن 2 .فاثبت أن G يحوي دارة .
(5) اتبع خوارزمية فلوري لايجاد درب أويلري للبيان المعطى في الشكل (2 − 21) .
(6) جد تغطيت صغرى للبيان المعطى في الشكل (2 − 22) .



شكل (2 21)



شكل (2 - 22)

(7) اذا كان G بياناً أويلريا بسيطا . فاثبت أن بيان المناقلة $I(G)$ هو بيان أويلري . وهل ان العكس صحيح أيضا ؟ ولماذا ؟

(8) اذا كان G بيانا متصلاً ومحتويا على k ، $k \geq 4$ ، من الرؤوس الفردية الدرجة ، فأثبت ان لـ G تغطيتين صغريين مختلفتين على الأقل .

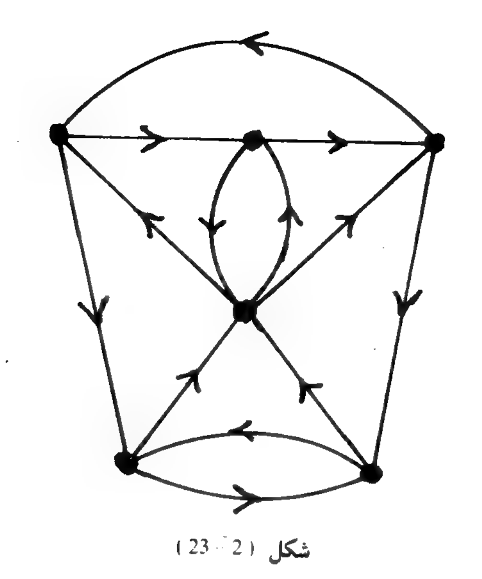
(9) اثبت ان كل مجموعة قاطعة لبيان أويلري تتكون من عدد زوجي من الحافات

(10) اذا كان D بيانا موجها بحيث ان $\rho^{+}(v) \geq 1$ ، $\rho^{-}(v) \geq 1$ لكل رأس v في D . فاثبت ان D يحتوي على دارة موجهة .

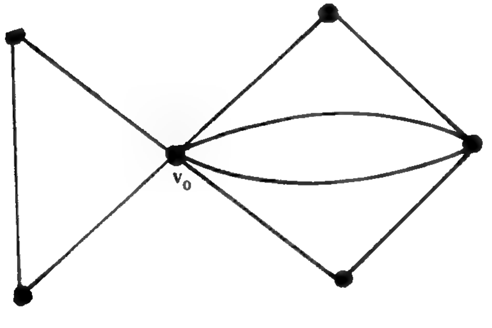
(11) برهن على المبرهنة (2 - 14) باستعمال التمرين (10) وباتباع طريقة مماثلة لطريقة اثبات المبرهنة (2 - 12) .

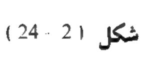
(12) اثبت ان البيان الموجه D المعطى في الشكل (2 - 23) هو بيان أويلري موجه . ثم جد دار موجهة تحتوي على كل الحافات الموجهة في D .

(13) يقال لبيان أويلري انه قابل الاجتياز كيفيا (arbitrary traversable) من الرأس v_0 اذا أعطت الطريقة الآتية دائماً دربا أويلريا : ابدأ من v_0 ومر على حافة واقعة عليه . وعند الوصول الى رأس u مر بشكل كيفي على أية حافة لم يسبق ان مررت عليها . واستمر هكذا الى ان تمر على كل حافة وتعود الى v_0. اثبت ان البيان في شكل (2 - 24) قابل الاجتياز كيفيا من v_0 . هل ان البيان المعطى في شكل (2 - 25) قابل الاجتياز كيفيا من الرأس v_0 ؟ أو من اي رأس آخر ؟

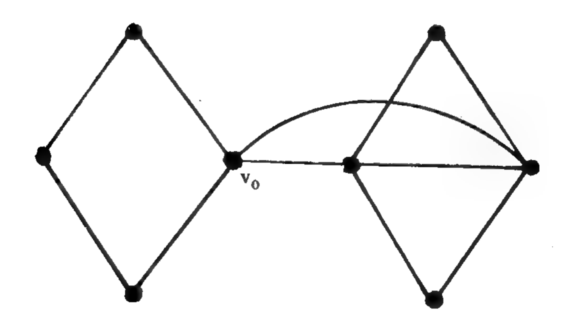


شکل (2 - 23)





شکل (2 - 24)



شکل (2 - 25)

(14*) برهن على ان بيانا أويلريا G هو بيان قابل الاجتياز كيفيا من الرأس v_0 اذا واذا فقط كل دارة في G تحوي v_0.

(6 - 2) البيانات الهملتونية (Hamiltonian Graps)

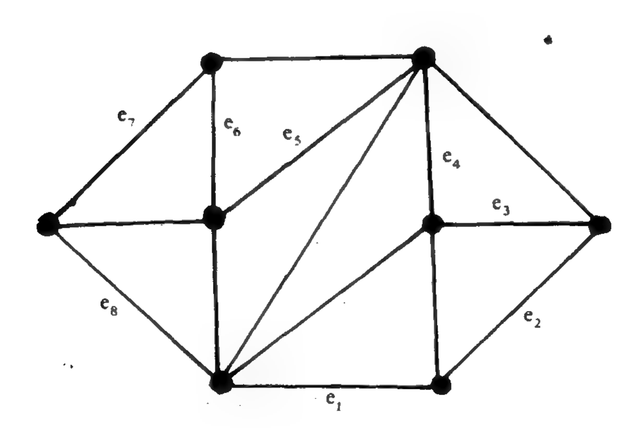
تتميز البيانات الاويلرية باحتوائها على دارة تمر بكل حافة مرة واحدة فقط. والمسألة التي تتبادر الى الذهن، والتي تشابه مسألة أويلر. هي استبدال كلمة حافة بكلمة رأس. أي دراسة البيانات التي تحتوي على دارة تمر بكل رأس مرة واحدة فقط، يطلق على مثل هذه البيانات بيانات هملتونية.

كل البيانات التي سنذكرها في هذا المجال هي بيانات منتهية.

ليكن G بياناً بسيطاً متصلاً. يقال لداره بسيطة في G انها دارة هملتونية اذا كانت محتوية على كل رأس من رؤوس G. ويقال لـ G انه بيان هملتوني اذا وجدت فيه دارة هملتونية. فالبيان في الشكل (2 – 26) هو بيان هملتوني. لأن

$(e_1 , e_2 , \ldots , e_8)$

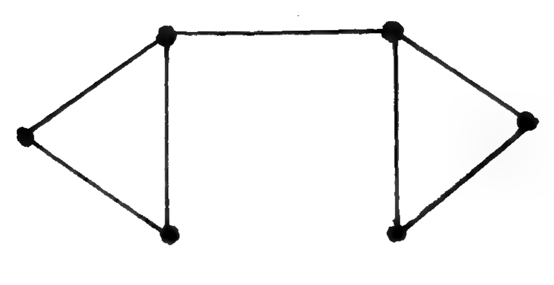
هي دارة هملتونية لهذا البيان.



شكل (2 26)

يطلق على بيان بسيط G الذي يحتوي على درب بسيط يمر مرة واحدة فقط في كل رأس في G بياناً شبه هملتوني (semi Hamiltonian). فالبيان في شكل (2 27) هو بيان شبه هملتوني ولكنه ليس هملتونياً. ويطلق على أي درب بسيط

يمر مرة واحدة فقط بكل رأس من رؤوس البيان درباً هملتونياً. واضح أن كل بيان هملتوني هو بيان شبه هملتوني ، لان البيان الهملتوني يجب ان يحتوي على دارة هملتونية ، أما البيان شبه الهملتوني فيجب ان يحتوي على درب هملتوني ، وطبيعي أن الدارة الهملتونية تحتوي على درب هملتوني .



شكل (2 - 27)

لقد لاحظنا في البند السابق ان هنالك شرطاً ضرورياً وكافياً لبيان متصل لكي يكون بياناً اويلرياً .لكن ايجاد شروط ضرورية وكافية لبيان متصل لكي يكون بياناً هملتونياً مسألة لاتزال غير محلولة بشكل كامل ، وكل ما هو معروف لحد الان هو وجود شروط كافية خاصة (اي ليست كلها ضرورية) او شروط ضرورية غير كافية بصورة عامة .ونقدم فيما يأتي بعض المبرهنات المهمة في هذا الموضوع .

لنفرض ان G بيان متصل بسيط برتبة n، $n \geq 3$ ، وليكن $P(v_0, v_k)$ درباً بسيطاً في G من v_0 الى v_k طوله k . ولنفرض ان رؤوس $P(v_0, u_k)$ هي بالترتيب

$$(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

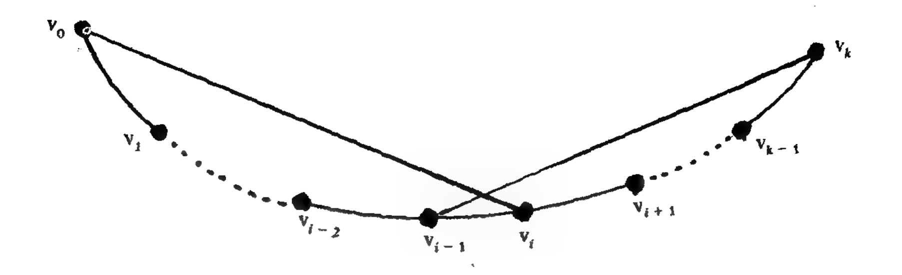
لنرمز بـ H للبيان المقطعي على مجموعة الرؤوس $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ اذا كانت درجة الرأس v_0 في H هي $\rho'(v_0)$ ودرجة الرأس v_k في H هي $\rho(v_k)$ ، وكان

$$\rho'(v_0) + \rho'(v_k) > k,$$

فان هنالك على الاقل حافة واحدة $[v_0, v_i]$ بحيث تقابلها حافة $[v_{i-1}, v_k]$. وهكذا ، نستنتج وجود دارة بسيطة رؤوسها بالترتيب هي

$$(v_0, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_0)$$

كما موضح في الشكل (2 – 28) .



شكل (2 - 28)

وهكذا ، اذا كان $\rho'(v_0) + \rho'(v_k) > k$ فان H هوبيان هملتوني .
اذا كان الدرب البسيط $P(v_0, v_k)$ أطول درب بسيط في G ، فان $\rho'(v_0) = \rho(v_0)$ ، $\rho'(v_k) = \rho(v_k)$ ، حيث ان $\rho(v_0), \rho(v_k)$ هما بالترتيب درجتا v_0, v_k في البيان G . وعندئذ نحصل على المبرهنة :

مبرهنة (2 – 15) : اذا كان $P(v_0, v_k)$ أطول درب بسيط في بيان متصل بسيط ، وكان طوله k يحقق المتباينة .

$$\rho(v_0) + \rho(v_k) > k$$

فان البيان المقطعي على مجموعة رؤوس $P(v_0, v_k)$ هوبيان هملتوني .

مبرهنة (2 – 16) : البيان المقطعي على مجموعة رؤوس أطول درب بسيط لبيان متصل بسيط G يكون هملتونياً فقط عندما يكون G بياناً هملتونياً .

البرهان : ليكن البيان المقطعي H على مجموعة رؤوس أطول درب بسيط $P(v_0, v_k)$ في G هملتونياً ، بما أن G بيان متصل فانه اذا لم يكن H كل البيان G فيجب أن تكون هنالك حافة $[v_i, w]$ ، حيث v_i رأس في H و w رأس ليس في H . وجود هذه الحافة يؤدي الى وجود درب بسيط احدى نهايتيه w وطوله اكثر من طول $P(v_0, v_k)$ بواحد ؛ وهذا يناقض كون $P(v_0, v_k)$ أطول درب بسيط في G .
لذلك ، فان $H = G$.

مبرهنة (2 – 17): أي بيان بسيط G اما أن يكون هملتونياً أو يكون الطول k لاطول درب بسيط في G يحقق

$$\rho_1 + \rho_2 \leq k,$$

حيث أن ρ_1 و ρ_2 هما الدرجتان الصغريتان من بين درجات رؤوس G .

البرهان : من المبرهنتين (2 – 15) و(2 – 16) اما أن يكون G هملتونياً أو يكون

$$\rho(v_0) + \rho(v_k) \leqq k, \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

حيث ان v_0 و v_k نهايتي أطول درب بسيط .ولكن (1) تؤدي الى

$$\min\{\rho(v_i) + \rho(v_j)\} \leqq k$$

لكل $v_i, v_j \in V(G)$ .. اذاً

$$\rho_1 + \rho_2 \leqq k$$

من المبرهنة السابقة نحصل على المبرهنة الاتية التي تعود الى اور (O.Ore , 1960) :

مبرهنة (2 – 18) : ليكن G بياناً متصلاً بسيطاً برتبة n ، $n \geqq 3$.

(أ) اذا كان

$$\rho(v) + \rho(u) \geqq n - 1,$$

لكل رأسين u و v في G ، فان G يحتوي على درب هملتوني .

(ب) اذا كان

$$\rho(v) + \rho(u) \geqq n$$

لكل رأسين u و v في G . فان G بيان هملتوني .

تعود المبرهنة الاتية الى العالم المشهور ديراك (G.A. Dirac , 1952).
وهي حالة خاصة من مبرهنة أور .

مبرهنة (2 – 19) : اذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً برتبة n ، $n \geqq 3$
وكان $\rho(v) \geqq \frac{1}{2} n$ لكل رأس v في G . فان G بيان هملتوني .

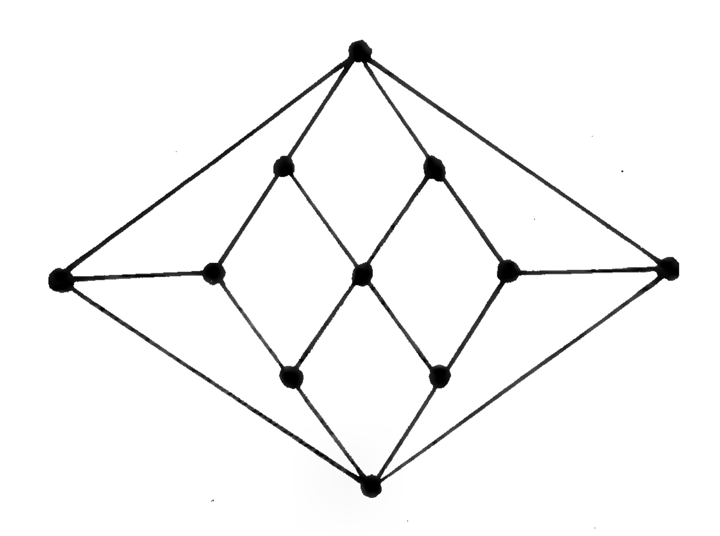
في العشرين سنة الاخيرة وجد علماء نظرية البيانات العديد من المبرهنات على البيانات الهملتونية . سواء كانت موجهة أو غير موجهة . ويمكن للقاريء الاطلاع على بعضها في المصدر [3]

تمارين (2 - 5)

(1) اثبت ان W_n هو بيان هملتوني لكل قيم n. هل أن بيان بيترسن شبه هملتوني؟ ولماذا

(2) برهن على أنه اذا كان G بيانا ثنائي التجزئة برتبة فردية ، فان G غير هملتوني .

(3) يطلق على البيان المعطى في الشكل (2 - 29) بيان هيرشيل (Herschel) . اثبت ان هذا البيان ثنائي التجزئة ، ثم اثبت انه غير هملتوني .



شكل (2 - 29) بيان هيرشيل

(4) عين قيم m و n بحيث ان $K_{m,n}$ بيان هملتوني .

(5) جد بيانا أويلريا غير هملتوني ، وجد بيانا هملتونيا غير أويلري . ماذا يمكن ان نقول عن البيانات التي هي أويلرية وهملتونية في نفس الوقت ؟ .

(6) بين انه لايمكن استبدال الشرط $[\rho(v) \geqq \frac{1}{2} n]$ في مبرهنة ديراك بالشرط $[\rho(v) \geqq \frac{1}{2} n - 1]$ وذلك بايجاد بيان يحقق الشرط الاخير لكل رأس v ولكنه غير هملتوني .

(*7) هل يمكن للحصان في الشطرنج أن يمر مرة واحدة فقط على كل مربع في لوحة الشطرنج ، التي هي 8 × 8 ، ويعود الى المربع الذي بدأ منه ؟ [تلميح : مثل كل مربع برأس ؛ يكون رأسان متجاورين اذا واذا فقط أمكن للحصان الانتقال من

أحدهما الى الآخر وفق قواعد لعبة الشطرنج] .

(8) يقال لبيان متصل بسيط انه بيان ثيتا (theta graph) اذا كان فيه رأسان غير متجاورين كل منهما بدرجة 3 . وكل من رؤوسه الباقية بدرجة 2. اثبت ان كل بيان ثيتا هو غير هملتوني . هل هو شبه هملتوني ؟

(9) يقال لبيان بسيط أنه بيان متصل -2 (2 – connected graph) اذا واذا فقط كل رأسين مختلفين فيه يقعان على دارة . برهن على أن كل بيان هملتوني هو متصل – 2. هل يوجد بيان متصل– 2 غير هملتوني ؟

(*10) برهن على ان كل بيان متصل – 2 غير هملتوني يحتوي على بيان ثيتا كبيان جزئي منه .

الفصل الثالث

الاشجار The Trees

هنالك نوع من البيانات البسيطة والمهمة جدا بحد ذاتها في نظرية البيانات وفي تطبيقاتها . تلك البيانات هي الاشجار . فهي مهمة في نظرية البيانات لأن بساطتها الكبيرة تمكننا من دراسة بعض التحزرات في نظرية البيانات على الأشجار أولا ثم الحصول على الجواب عن مدى صحة هذه التحزرات على البيانات الأخرى بصورة عامة

سيتضمن هذا الفصل بعض التعاريف لمفاهيم ذات صلة بالاشجار ، مع بعض خواص ومميزات الاشجار . ثم نشرح مسألة حساب عدد الاشجار المولدة لبيان متصل ، وطريقة ايجاد تلك الاشجار . وأخيرا ، نشرح اشجار القياس الكلي الاصغر وكيفية الحصول عليها مع الاشارة الى بعض استخداماتها .

(3 – 1) بعض مميزات الاشجار

لقد سبق ان عرفنا مفهومي الشجرة والشجرة المولدة لبيان متصل وكان ذلك في البند (3 - 2). فعرفنا الشجرة بأنها بيان متصل لايحتوي على أية دارة . بالطبع ، بموجب هذا التعريف الشجرة بيان بسيط . كما يقال لأي بيان لايحتوي على دارات بأنه غابة (forest) واضح ان مركبات أية غابة هي أشجار .

وهكذا ، فان الشجرة هي غابة مكونة من مركبة واحدة ، ففي الشكل (3 – 1) أعطيت غابة مكونة من ثلاث مركبات وهي الاشجار T_3 ، T_2 ، T_1 .

تعريف الشجرة ليس وحيداً ، فهناك العديد من التعاريف المتكافئة بعضها مع بعض ، كما منصوص عليها في المبرهنة الآتية .

مبرهنة (3 - 1): ليكن T بياناً عدد رؤوسه n . العبارات الآتية متكافئة:

(1) T هي شجرة.

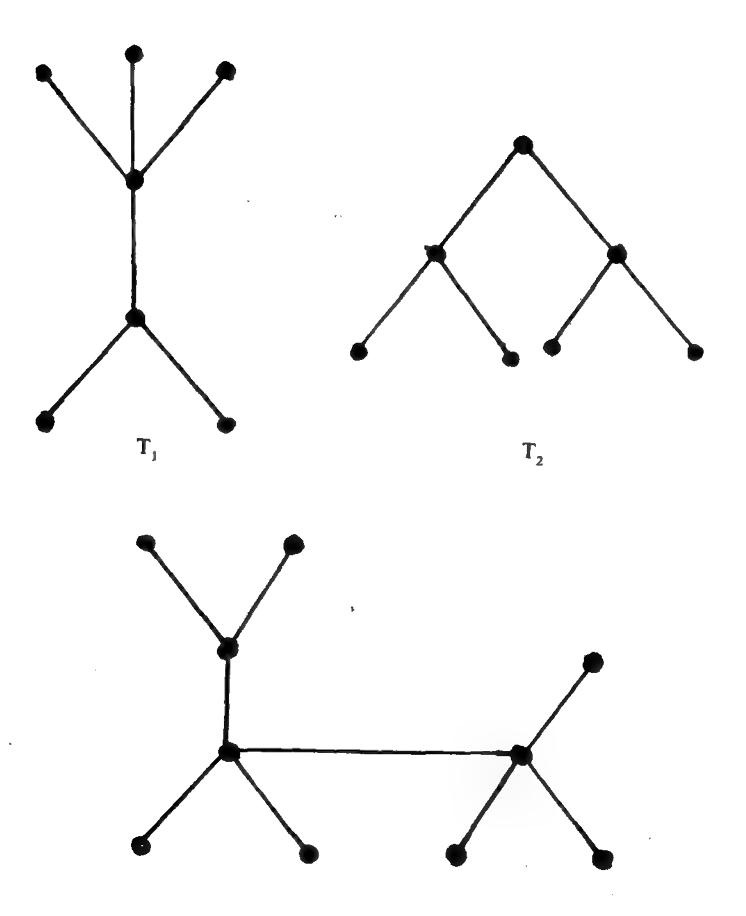
(2) يوجد بين كل رأسين في T درب وحيد.

(3) T متصل وكل حافة فيه هي برزخ.

(4) T متصل وعدد حافاته $(n-1)$

(5) عدد حافات T هو $(n-1)$ ولايحتوي على دارات.

(6) لايحتوي T على دارات، ولكن اذا وصلنا أي رأسين غير متجاورين فيه نحصل على بيان يحتوي على دارة واحدة فقط.



شكل (3 - 1)

البرهان:

$(1) \Rightarrow (2)$

ليكن u و v أي رأسين في T . لما كان T متصلاً. فانه يوجد درب واحد على الاقل بين u و v . لنفرض أن p_1 و p_2 دربان مختلفان بين u و v . اذاً. توجد حافة في أحدهما لاتنتمي الى الاخر. ولنفرض ان الحافة [x . y] في p_1 وليست في p_2 . ان هذا الفرض يؤدي الى وجود درب p بين الرأسين x و y ولايحتوي على الحافة [x . y]. وعليه. فان p يكوّن مع الحافة [x.y] دارة في T . مما يناقض كون T شجرة. وبذلك فان $p_1 = p_2$.
وهكذا يوجد بين كل رأسين في T درب وحيد.

$(2) \Rightarrow (3)$

واضح أن T متصل لتكن e=[u . v] أية حافة في T . البيان ′T الناتج من T بازالة e هو غير متصل ، لانه اذا كان متصلاً فان ذلك يؤدي الى وجود درب بين u و v في ′T . وهذا بدوره يؤدي الى وجود دربين مختلفين بين u و v في T . مما يناقض وجود درب وحيد بين كل رأسين في T . وعليه . فان e برزخ.

$(3) \Rightarrow (4)$

سنبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي على n ان عدد حافات T هو (n - 1)

واضح انه اذا كان n=1 فان عدد حافات T هو 0. واذا كان n=2 فان عدد حافات T هو 1. والآن. نفرض أن (3) تؤدي الى (4) عندما يكون عدد رؤوس T أقل من n. ولنأخذ الحالة عندما يكون عدد رؤوس T هو n . بما أن كل حافة في T هي برزخ. فان ازالة حافة e من T تؤدي الى مركبتين T_1 و T_2 . بما ان كلاً من T_1 و T_2 متصل ، وان كل حافة في أي منهما هي برزخ. فانه بموجب فرض الاستقراء الرياضي يكون عدد حافات T_1 هو $(n_1 - 1)$ وعدد حافات T_2 هو $(n_2 - 1)$. حيث أن $n_1 . n_2$ عدد رؤوس $T_1 . T_2$. على الترتيب. اذاً. عدد حافات T هو

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1$$

$(4) \Rightarrow (5)$

نحتاج الى أن نبرهن على أن T لايحتوي على دارات. فاذا احتوى T على دارة ، فان ازالة أية حافة من هذه الدارة يؤدي الى بيان متصل عدد رؤوسه n وعدد حافاته n−2.

ولكن هذا يناقض المبرهنة (2 - 5). لذلك، فان T لايحتوي على دارات.

(5) ⇐ (6)

نبرهن أولاً على ان T متصل. اذا كانت $T_1, T_2, \dots, T_k$ مركبات T. فان كلاً من هذه المركبات خالٍ من الدارات ومتصل. وبذلك فانه شجرة. ولما كان (4) ⇐ (1)، فان عدد حافات T_i هو ($n_i - 1$)، حيث إن n_i عدد رؤوس T_i. لكل $i = 1, 2, \dots, k$ وعليه، فان عدد حافات T هو ($n - k$)، ومنها نستنتج أن $k=1$. اذاً، T بيان متصل. وهو بذلك شجرة. ولما كان (2) ⇐ (1)، فان هنالك درباً وحيداً بين كل رأسين في T. فاذا كان u وv رأسين غير متجاورين في T، فان اضافة حافة [u, v] الى T يؤدي الى تكوين دارة واحدة فقط بسبب وجود درب وحيد بين الرأسين u وv.

(6) ⇐ (1)

اذا لم يكن T متصلاً، فان إضافة حافة تصل بين رأسين في مركبتين مختلفتين لايؤدي الى تكوين دارة في T، مما يناقض (6). ولذلك، فان (6) تؤدي الى كون T متصلاً، أي ان T شجرة.

وبهذا يتم اثبات المبرهنة.

من المبرهنتين (3 - 1) و(1 - 1) نحصل على النتيجتين الآتيتين.

نتيجة (3 - 1): عدد حافات الغابة المكونة من n من الرؤوس وk من المركبات هو ($n - k$).

نتيجة (3 - 2): يوجد رأسان على الاقل بدرجة 1 في كل شجرة عدد رؤوسها لايقل عن 2.

سنطلق على كل رأس بدرجة 1 في شجرة نهاية (end).

مبرهنة (3 - 2): كل شجرة لها مركز واحد أو مركزان متجاوران.

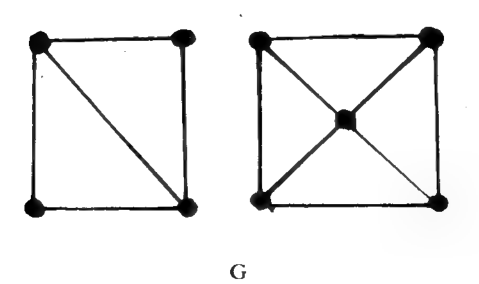
البرهان: المبرهنة صحيحة عندما تكون الشجرة K_1 أو K_2. لتكن T أية شجرة عدد رؤوسها n، $n \geq 3$. واضح أن الاختلاف المركزي $R(v)$ للرأس v في T هو المسافة بين v ونهاية لـ T. كما أن أية نهاية لـ T لايمكن أن تكون مركزاً. فاذا كانت T' الشجرة الناتجة من T بحذف كل نهاية مع الحافة الواقعة عليها، فان الاختلاف المركزي $R'(v)$ في T' لرأس v في T يقل بواحد عن الاختلاف المركزي $R(v)$ في T لنفس الرأس v

وعليه . اذا كان v_0 مركزاً لـ T . فان v_0 نفسه مركز لـ T' .

اذا كررنا تطبيق حذف نهايات الشجرة . عندما لاتكون K_1 او K_2 . فاننا سوف نحصل على تتابع من أشجار لها نفس المراكز . ولما كانت T منتهية . فاننا سوف نتوصل اخيراً الى K_1 أو K_2 . فاذا حصلنا على K_1 . فان الرأس الوحيد في K_1 هو المركز الوحيد لـ T . واذا حصلنا على K_2 . فانرأسي K_2 هما مركزاه . وهما في الوقت نفسه مركزا T . ■

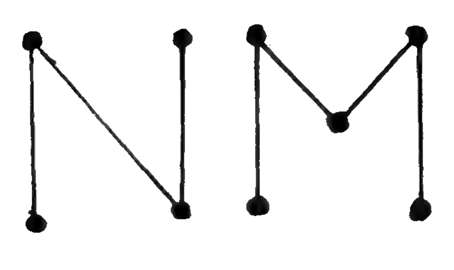
وقد سبق أن عرفنا الشجرة المولدة لبيان متصل G على أنها شجرة لـ G تحتوي على كل رؤوسه . بالطبع لكل بيان متصل توجد على الاقل شجرة مولدة واحدة . فاذا كان G متصلاً ومحتوياً على دارة . فيمكن ازالة حافة من تلك الدارة . فان كان هنالك دارة اخرى نزيل منها احدى حافاتها . وهكذا حتى لاتبقى في G أية دارة . وعندئذ يكون البيان الجزئي الناتج شجرة مولدة لـ G .

وتعرف الغابة المولدة لبيان غير متصل G . بانها غابة لـ G محتوية على كل رؤوس G . واضح انه اذا كان G مكونا من K من المركبات . فان اية غابة F لـ G تتكون من K من المركبات . كل منها شجرة مولدة لاحدى مركبات G . فمثلاً . البيان الجزئي المبين في الشكل (3 3) هو غابة للبيان المعطي في الشكل (3 2)



G

شكل (3 2)



شكل (3 - 3)

ليكن G بياناً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد مركباته k . يطلق على العدد

$$\gamma(G) = m - n + k$$

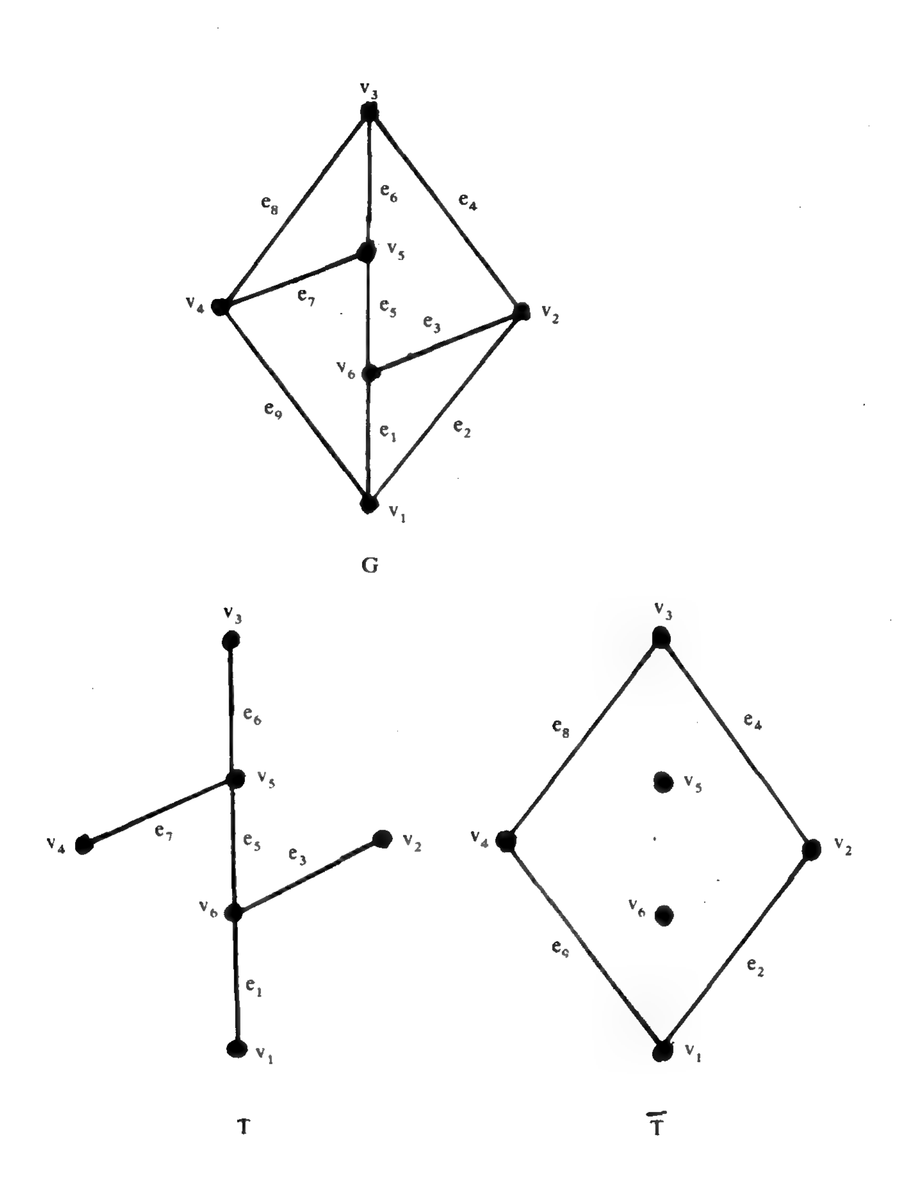
الرقم الدوراني (cyclomatic number) أو مرتبة الدارات (the circuit rank) للبيان G . فاذا كان G متصلاً . فان

$$\gamma(G) = m - n + 1$$

وعندما يكون البيان شجرة T . فان $\gamma(T) = 0$. وذلك بموجب (4) من المبرهنة (3 - 1) . بالطبع $\gamma(G)$. لاي بيان G ، هو عدد غير سالب بموجب نتيجة (2 - 1) .

اذا كانت T شجرة مولدة لبيان متصل G . فانه يطلق على $\bar{T} = G - T$ تتمة الشجرة (cotree) T للبيان G . واضح ان عدد حافات تتمة الشجرة لبيان متصل عدد رؤوسه n وعدد حافاته m هو $(m - n + 1)$. وهو الرقم الدوراني للبيان . يطلق عادة على كل حافة في الشجرة المولدة T غصناً (branch) . كما يطلق على كل حافة في تتمة الشجرة T . وتر (chord) الشجـرة T .

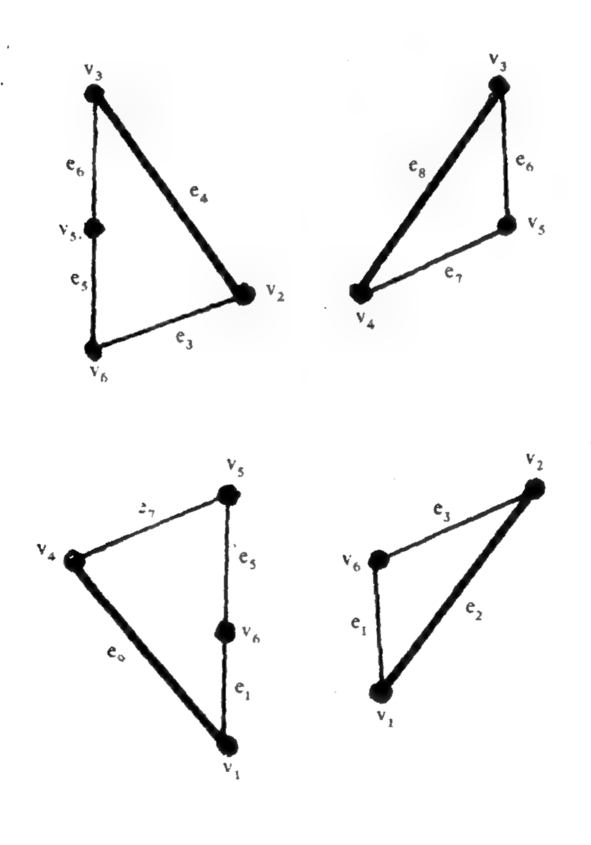
الشكل (3 4) يبين شجرة مولدة T مع تتمة الشجرة T للبيان المعطى G



شكل (3 - 4)

وبالمثل . نعرف تتمة الغابة لبيان غير متصل G .فاذا كانت F غابة مولدة للبيان G .فان تتمة الغابة (coforest) هي البيان الجزئي المتمم $\bar{F}$. وهو الذي ينتج من G بازالة كل حافات F .

اذا كانت F غابة لبيان G . فان اضافة احدى حافات $\bar{F}$ الى F يكون دارة بسيطة واحدة فقط . و ذلك بموجب (6) من المبرهنة (3 1) . وبذلك فان حافات $\bar{F}$. عندما تضاف الى F واحدة في كل مرة . تكون $(m - n + k)$ من الدارات البسيطة المختلفة . حيث ان n عدد رؤوس G و m عدد حافاته و k عدد مركباته .يطلق على مجموعة هذه الدارات اسم النظام الاساس للدارات المشاركة مع F .ولهذا النظام من الدارات اهمية كبيرة في استخدامات نظرية البيانات في تحليل الشبكات الكهربائية .ولتوضيح هذا النظام من الدارات رسمنا في الشكل (3 – 5) الدارات الاساسية المشاركة مع الشجرة المولدة T المبينة في الشكل (3 4) . وقد أُشيرَ الى الوتر المضاف بخط سميك .



شكل (3 5)

واضح . ان عدد العناصر في اي نظام أساسي للدارات يساوي الرقم الدوراني لذلك البيان .

كما ان هنالك علاقة وثيقة بين تتمات الغابات مع الدارات [انظر تمرين (6) من مجموعة تمارين (3 − 1)] . فان هنالك علاقة مشابهة بين الغابات المولدة مع المجموعات القاطعة [انظر تمرين (5) من مجموعة تمارين (3 − 1)] . لذلك . فانه من المناسب تعريف مرتبة المجموعات القاطعة . فاذا كان G بياناً وكانت F غابة مولدة لـ G . فاننا نعرف مرتبة المجموعات القاطعة (the cut-set rank) للبيان G بانها عدد حافات F . ونرمز لهذه المرتبة بـ $\delta(G)$. اذاً $\delta(G) = n - k$. حيث ان n هو عدد رؤوس G و k عدد مركباته .

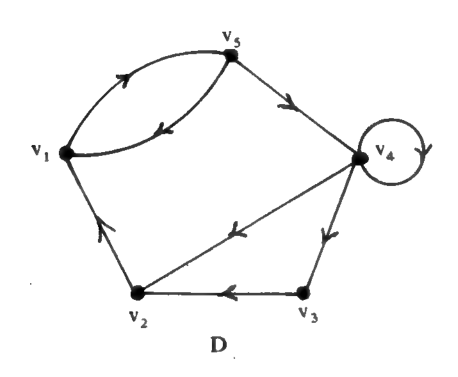
بموجب (3) من المبرهنة (3 − 1) . فان عملية ازالة أية حافة e من غابة مولدة F لبيان G تؤدي الى زيادة عدد مركبات F بواحد فقط . في الواقع ان ازالة e من F يؤدي الى تجزئة مجموعة الرؤوس لاحدى الاشجار في F ولتكن الشجرة T . الى مجموعتين جزئيتين V_1 و V_2 . واضح ان T هي شجرة مولدة لاحدى مركبات البيان G . ولتكن المركبة H . بالطبع . e هي حافة في T . وعليه . فان مجموعة كل حافات H التي تصل رأساً من V_1 برأس من V_2 هي مجموعة قاطعة لـ H . وهي بذلك مجموعة قاطعة لـ G . هذه المجموعة القاطعة تحتوي على غصن واحد فقط . وهو e . من الغابة F . ولما كان لدينا n − k من الاغصان في F . فانه يمكننا الحصول على n − k من المجموعات القاطعة المختلفة . كل منها تحتوي على غصن واحد فقط من F . علما بان n عدد رؤوس G و k عدد مركباته . يطلق على هذه المجموعات القاطعة النظام الاساسي للمجموعات القاطعة المشاركة مع F . وتوضيحا لذلك . فان النظام الاساسي للمجموعات القاطعة المشاركة مع الشجرة المولدة T للبيان G المعطى في الشكل (3 − 4) هو :

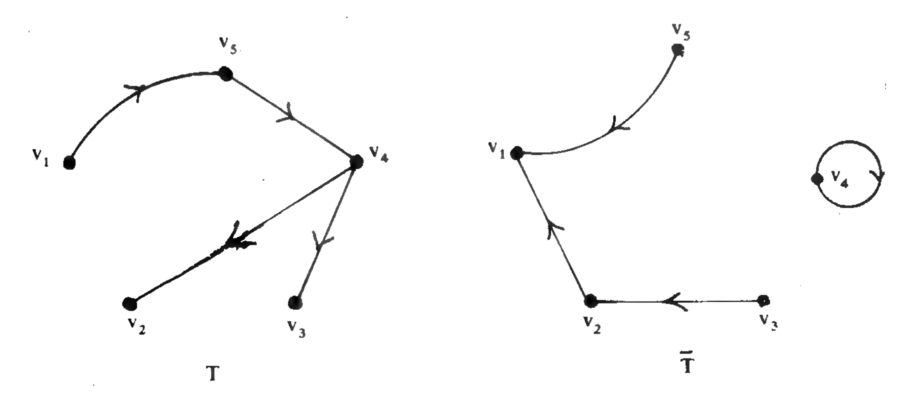
$$\{e_1, e_2, e_9\}, \{e_3, e_2, e_4\}, \{e_5, e_4, e_9\}, \{e_6, e_4, e_8\}, \{e_7, e_8, e_9\}$$

نتعامل في كثير من التطبيقات مع الغابات لبيانات موجهة ولذلك نجد من الضروري الاشارة اليها هنا . تعرف الغابة (تتمة الغابة) لبيان موجه D على أنها الغابة (تتمة الغابة)

للبيان الناتج من D باهمال اتجاهات الحافات الموجهة. فمثلاً، الشكل (3 – 6) يوضح بياناً موجهاً D مع شجرة T وتتمة الشجرة $\bar{T}$.

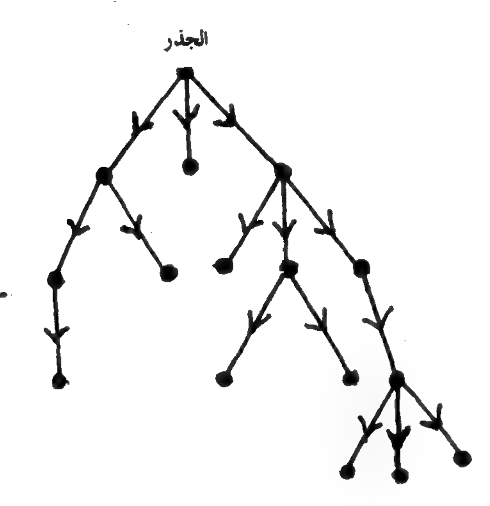
وهكذا، تعمم بقية المفاهيم المارة الذكر في هذه الفقرة على البيانات الموجهة. ولكن في بعض التطبيقات نحتاج الى ان نأخذ بنظر الاعتبار اتجاه الحافات في شجرة ما. وعندئذ نحتاج الى تعريف المزيد من المفاهيم. فاذا كان D بياناً موجهاً، فاننا نقول لرأس انه جذر (root) لـ D اذا كان هنالك درب موجه من v الى كل رأس آخر في D. ففي البيان الموجه D المبين في الشكل (3 - 6)، كل رأس هو جذر لـ D، لان D بيان متصل بشدة.





شكل (3 - 6)

وبهذا الخصوص تعرف الشجرانية (the arborescence) على أنها شجرة للبيان الموجه تحتوي على جذر ؛ ولذلك يقال لها احياناً شجرة جذرية (rooted tree) . فمثلاً ، الشجرة T المبينة في الشكل (3 - 6) هي شجرانية لـ $\bar{D}$ ، لان الرأس v_1 هو جذر T . ومعروف أن شجرة العائلة (family tree) هي شجرانية . [انظر الشكل (3 - 7)] .



شكل (3 - 7) شجرة العائلة

تمارين (3 - 1)

(1) جد كل الاشجار غير المتشاكلة مثنى مثنى التي لها 5 رؤوس .

(2) ارمز لرؤوس K_4 بـ v_1 ، v_2 ، v_3 ، v_4 وارمز لحافاته بـ e_1 ، e_2 ،...، e_6 ثم جد الاشجار المولدة للبيان التام K_4 . ماهي العلاقة بين عدد رؤوس K_4 وعدد أشجاره هذه ؟

(3) برهن النتيجتين (3 — 1) و (3 — 2).

(4) اثبت ان كل شجرة هي بيان ثنائي التجزئة .

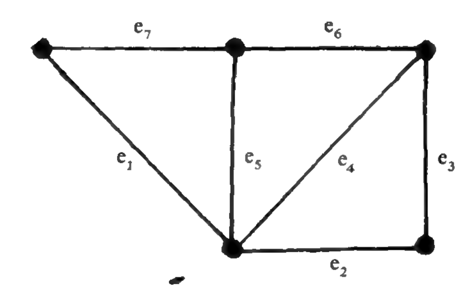
(5) برهن على أن كل دارة في بيان G تشترك بحافة واحدة على الاقل مع كل تتمة غابة لـ G .

(6) احسب مرتبة الدارات ومرتبة المجموعات القاطعة لكل من بيان بيترسن، K_n ، W_n ، $K_{m,n}$.

(7) جد مراكز كل من الاشجار في الغابة المبينة في الشكل(3–1). وجد نصف قطر وقطر كل منها.

(8) يعرف التحويل الشجري بالعملية الآتية : اذا كانت T شجرة مولدة لبيان متصل G . وكانت e حافة في T . فيمكن الحصول من T على شجرة T تحتوي على e وذلك باضافة e الى T وازالة حافة تنتمي الى T من الدارة الوحيدة المتكونة. بين كيفية الحصول على شجرة مولدة T_2 من شجرة معطاة T_1 بما لايزيد على (n–1) من التحويلات الشجرية المتتابعة . حيث أن n عدد رؤوس G .

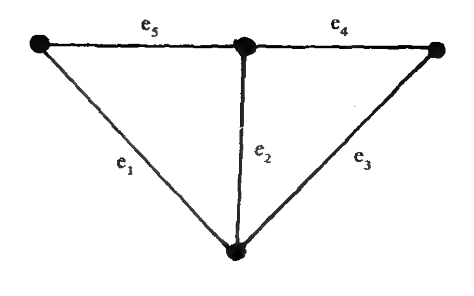
(9) ليكن G بياناً متصلاً رتبته n وحافاته $e_1 , e_2 , \ldots , e_m$. تعرف مصفوفة الدارات (the cycle matrix) لـ G بانها المصفوفة $B = [b_{ij}]$ بسعة $l \times m$ بحيث أن $b_{ij} = 1$ اذا كانت e_j حافة في الدارة البسيطة C_i . و $b_{ij} = 0$ اذا لم تكن e_j حافة في الدارة البسيطة C_i . حيث أن $C_1 , C_2 , \ldots , C_l$ هي الدارات البسيطة في G . جد مصفوفة الدارات للبيان المعطى في الشكل(3–8).



شكل (3 - 8)

(*10) في حقل الاعداد الصحيحة بمعيار 2 . إثبت أن مرتبة مصفوفة الدارات B لبيان متصل عدد رؤوسه n وعدد حافاته m لاتقل عن $m - n + 1$.

(11) ليكن G بياناً متصلاً بسيطاً رتبته n وحافاته $e_1 , e_2 , \ldots , e_m$. تعرف مصفوفة المجموعات القاطعة (the cut-set matrix) لـ G بانها المصفوفة $Q = [q_{ij}]$ بسعة $h \times m$ بحيث أن $q_{ij} = 1$ اذا كانت e_j حافة في المجموعة القاطعة Q_i ، و $q_{ij} = 0$ اذا لم تكن e_j حافة في المجموعة القاطعة Q_i . حيث أن



شكل (3 - 9)

$Q_1 , Q_2 , \ldots, Q_n$ هي كافة المجموعات القاطعة للبيان G . جد مصفوفة المجموعات القاطعة للبيان في الشكل (3 − 9) .

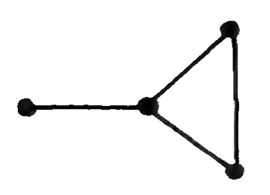
(12*) في حقل الاعداد الصحيحة بمعيار 2 . إثبت أن مرتبة مصفوفة المجموعات القاطعة لبيان متصل بسيط عدد رؤوسه n لاتقل عن (n − 1) .

(3 − 2) تعداد الاشجار :

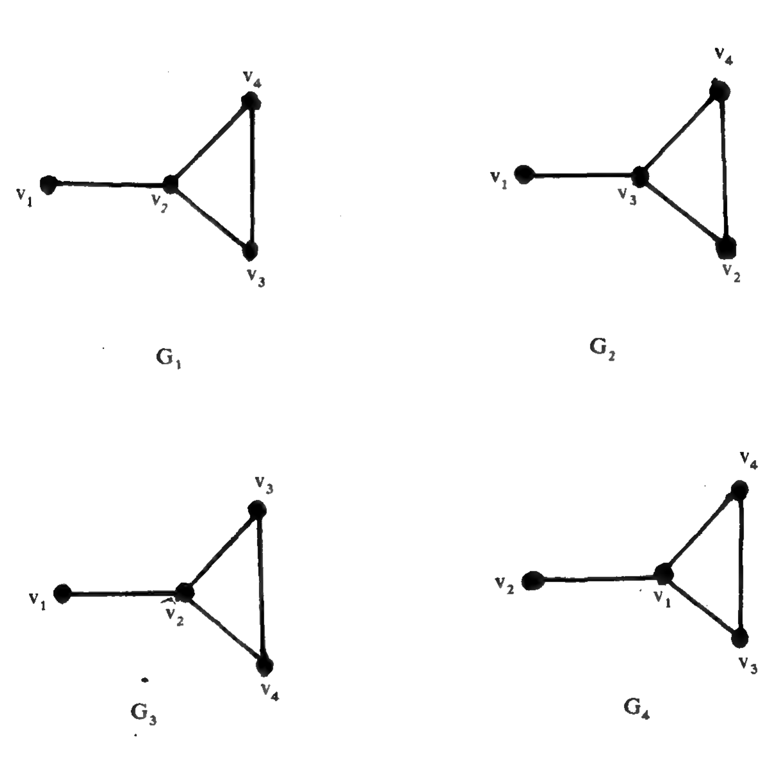
سيقتصر شرحنا في هذا البند على البيانات البسيطة . إن موضوع تعداد البيانات يهتم بمسألة حساب عدد البيانات البسيطة التي لها خواص معينة ومحددة.

والبيانات التي سوف تكون مدار شرحنا في هذا البند هي البيانات الموسومة (labelled graphs) . ويقصد بالبيان الموسوم على أنه بيان G مع تطبيق متباين وشامل (معطى ومعين) من مجموعة الرؤوس V (G) الى مجموعة الاعداد الطبيعية { 1,2 ,..., n } ، حيث أن n عدد رؤوس G .

وعلى هذا الاساس . سنرمز لرؤوس بيان موسوم بـ $v_1 , v_2 , \ldots, v_n$. وبطبيعة الحال ، يمكن أن نحصل من بيان غير موسوم على العديد من البيانات الموسومة . فالبيان G في الشكل (3 − 10) غير موسوم ، اما البيانات في الشكل (3 − 11) فهي بيانات موسومة لنفس البيان G .



شكل (3 - 10)

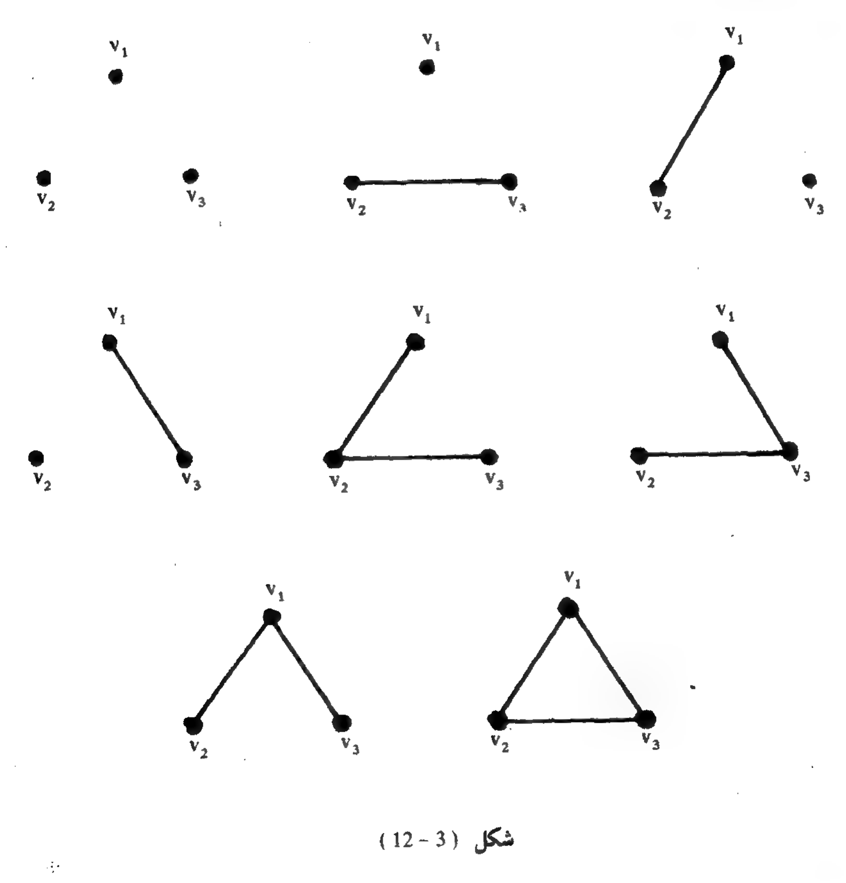


شكل (3 - 11)

وسوف نقول لبيانين موسومين G و G' أنهما متشاكلان اذا وجد تشاكل بين G و G' بحيث يحفظ تسميات الرؤوس ، اي ، عندما نمثل كل حافة بزوج غير مرتب لرأسيه (بالتسميات المعطاة) يكون لدينا $E(G') = E(G)$. ففي الشكل (3 – 11) ، البيان الموسوم G_1 غير متشاكل مع G_2 ، ولكن G_1 متشاكل مع G_3 ، لان

$$E(G_1) = E(G_3) = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_4]\}$$
$$\neq \{[v_1, v_3], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_4]\} = E(G_2).$$

وعند حساب البيانات الموسومة سنحسب البيانات الموسومة المختلفة (اي غير المتشاكلة مع بعضها) فقط . ففي الشكل (3 – 12) ، ذكرنا كل البيانات الموسومة المختلفة التي يمكن تكوينها من ثلاثة رؤوس ، ونلاحظ أن عددها هو $2^3 = 8$. ونلاحظ هنا أن هنالك ثلاث أشجار مختلفة رؤوسها v_1, v_2, v_3 ، اي أن K_3 له ثلاث أشجار مولدة



شكل (3 - 12)

لنفرض ان لدينا n من الرؤوس واننا نريد معرفة عدد البيانات الموسومة المختلفة التي يمكن تكوينها والتي لها هذه الرؤوس .اذا كان G اياً من هذة البيانات ، فان اية حافة اما أن تكون موجودة في G او غير موجودة فيه .ولما كان

لدينا $n(n-1)/2$ من الحافات على n من الرؤوس وان لكل حافة حالتين ، فانه يمكن تكوين $2^{n(n-1)/2}$ من البيانات الموسومة. وعليه . فان لدينا المبرهنة الاتية :

مبرهنة (3 – 3) : عدد البيانات الموسومة بـ n من الرؤوس هو $2^{n(n-1)/2}$.
أي . ان عدد البيانات الجزئية الموسومة من البيان التام K_n هو $2^{n(n-1)/2}$.

من طريقة اثبات هذه المبرهنة . نستنتج النتيجة الاتية :

نتيجة (3 – 3) : عدد البيانات الموسومة بـ n من الرؤوس و m من الحافات هو

$$\binom{n(n-1)/2}{m} .$$

ولكي نجد بعض الصيغ لتعداد الاشجار الموسومة المختلفة نحتاج الى بعض المفاهيم والخواص المعروفة في مبرهنة ذات الحدود . التي نذكرها في ادناه كمأخوذات تاركين براهينها للطالب كتمارين .

مأخوذة (3 - 1) : لتكن X مجموعة من n من الاشياء المختلفة . ولتكن $n_1, n_2, \dots n_p$ اعدادا صحيحة غير سالبة بحيث ان

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n ,$$

فان عدد الطرق المختلفة لوضع هذة الاشياء في p من الصناديق $X_1, X_2, \dots, X_p$ بحيث نضع n_i من الاشياء في الصندوق X_i . لكل $i = 1,2, \dots, p$. هو

$$\frac{n_i}{(n_1)!(n_2)!\dots(n_p)!} .$$

يرمز لهذا العدد بالرمز ،

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$$

يطلق على المأخوذة الآتية « مبرهنة ذات الحدود » ، ومنها يتبين أن

معامل الحد $(a_1)^{n_1}(a_2)^{n_2}\dots(a_p)^{n_p}$ في مفكوك ذات الحدود $(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$ هو

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}.$$

مأخوذة (3 - 2) : اذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_p$ اعدادا حقيقية وكان n عددا صحيحاً موجبا ، فان

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p \geq 0} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} (a_1)^{n_1}(a_2)^{n_2}\dots(a_p)^{n_p}$$

لاحظ ان المعامل

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p}$$

يكون صفرا بالتعريف الاّ اذا كان

$$n_1 + n_2 + \dots + n_p = n, \qquad n_1, n_2, \dots, n_p \geqq 0.$$

وسوف نحتاج الى المأخوذة الآتية لاجل اثبات المبرهنة (3 - 4) .

مأخوذة (3 - 3) : اذا كان n عددا صحيحاً موجباً ، فان

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_p} = \sum_{i; n_i \geqq 1} \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_p}$$

نحن الآن مهيؤون لتعداد الاشجار الموسومة المختلفة بـ n من الرؤوس ولاجل ذلك نثبت المبرهنة الآساسية الاتية .

مبرهنة (3 - 4) : ليكن $N(n; d_1, d_2, \dots, d_n)$ عدد الاشجار المختلفة T

بالرؤوس $v_1, v_2, \ldots, v_n$ التي درجاتها ، بالترتيب ، هي $d_1, d_2, \ldots, d_n$.
عندئذ

$$N(n : d_1, d_2, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

البرهان : من الواضح أن مجموع درجات رؤوس T هو ضعف عدد الحافات ، اي انه $2(n-1)$. وعليه

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = 2(n-1) - n = n - 2. \qquad \ldots (1)$$

وهكذا ، فان $N \neq 0$ عندما تحقق الاعداد الصحيحة غير السالبة $d_1, d_2, \ldots, d_n$ العلاقة (1) . وفيما عدا ذلك يكون $N = 0$.

بدون المساس بعمومية المسألة . يمكننا أن نفرض

$$d_1 \geqq d_2 \geqq \ldots \geqq d_n$$

ومنها نستنتج أن $d_{n-1} = d_n = 1$ ، لان كل شجرة تحتوي على نهايتين على الاقل .

عدد الاشجار التي رؤوسها $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ودرجاتها ، بالترتيب ، هي $d_1, d_2, \ldots, d_n$. والتي يكون فيها الرأس v_n متجاوراً مع الرأس v_i الذي درجته $d_i \geqq 2$ ، هو

$$N(n-1; d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1}).$$

وبذلك ، فان

$$N(n; d_1, d_2, \ldots, d_n) = \sum_{i : d_i \geqq 2} N(n-1; d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1})$$

ان اكمال البرهان يتم بالاستقراء الرياضي على n . المبرهنة صحيحة عندما $n = 2$.
والآن نفرض أن $n \geqq 3$ وأن المبرهنة صحيحة لأجل $(n-1)$. عندئذ

$$N(n; d_1, d_2, \ldots, d_n) = \sum_{i: d_i \geq 2} N(n-1; d_1, d_2, \ldots, d_i - 1, \ldots, d_{n-1})$$

$$= \sum_{i \cdot d_i \geq 2} \binom{n-3}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_i - 2, \ldots, d_{n-1} - 1}$$

[بموجب فرض الاستقراء الرياضي]

$$= \binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{n-1} - 1}$$

[بموجب المأخوذة (3 – 3)]

$$= \binom{n \quad 2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

لان $d_n = 1$ وأن $0! = 1$. وبهذا يتم البرهان . ■

من هذه المبرهنة نستنتج العديد من النتائج المفيدة .

نتيجة (3 – 4) : – تعود الى كيلي (1889) – عدد الاشجار المختلفة T بالرؤوس $v_1, v_2, \ldots, v_n$ هو n^{n-2}

البرهان : من المبرهنة (3 – 4) وباستعمال المأخوذة (3 – 2) مع وضع $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. يكون عدد الاشجار المختلفة مساوياً لـ

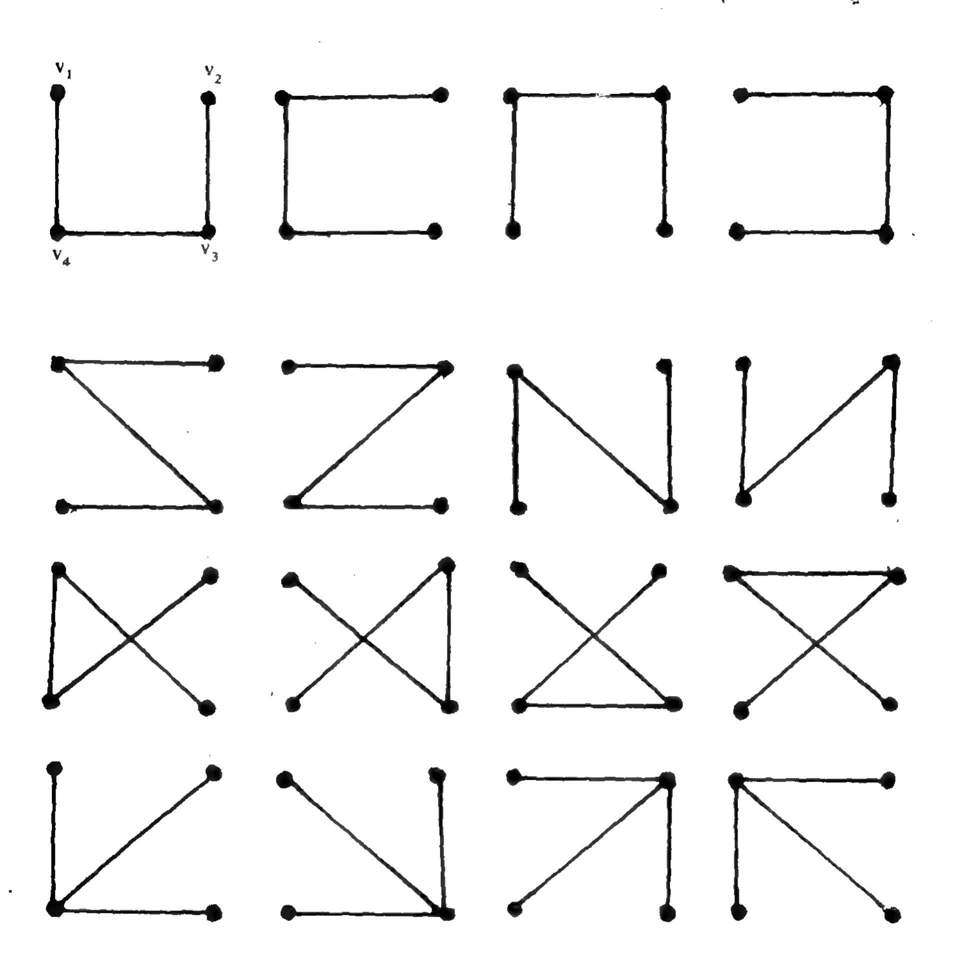
$$\sum_{d_1, \ldots, d_n \geq 1} \binom{n-2}{d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_n - 1} = (1 + 1 + \ldots + 1)^{n-2}$$

$$= n^{n-2} \quad ■$$

بما أن كل شجرة موسومة بـ n من الرؤوس تقابل شجرة مولدة وحيدة للبيان الموسوم K_n . وبالعكس . كل شجرة مولدة لـ K_n تؤدي الى شجرة موسومة وحيدة بـ n من الرؤوس . فان النتيجة (3 – 4) تكافيء النتيجة الآتية :

نتيجة (3 – 5) : عدد الاشجار المولدة لـ K_n هو n^{n-2} .

في الشكل (3 – 13) ذكرت جميع الاشجار المولدة للبيان التام K_4 . ونلاحظ أن عددها هو $16 = 4^{4-2}$. كما نلاحظ ان بين هذه الاشجار 12 شجرة كل منهـا متشاكلة مع درب بسيط طوله 3 . أما الاشجار الاربعة الباقية فهي متشاكلة مع البيان الثنائي التجزئة التام $K_{1,3}$.



شكل (3 – 13) الاشجار المولدة لـ K_4

نتيجة (3 – 6) : – تعود الى كلارك (Clarke, 1958) – عدد الاشجار المختلفة T التي رؤوسها $v_1, v_2, \ldots, v_n$ والتي فيها $\rho(v_1) = k$ اعلى درجــة للرؤوس . هو

$$\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

البرهان : بموجب المبرهنة (3 − 4)) . يكون عدد الاشجار الموصوفة في نص النتيجة هو

$$\sum_{d_2,\ldots,d_n\geqq 1}\binom{n-2}{k-1,d_2-1,\ldots,d_n-1}$$

$$=\sum_{d_2,\ldots,d_n\geqq 1}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(d_2-1)!\ldots(d_n-1)!}$$

$$=\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\sum_{d_2,\ldots,d_n\geqq 1}\binom{n-k-1}{d_2-1,d_3-1,\ldots,d_n-1}$$

$$=\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

وذلك باستعمال المأخوذة (3 − 2) وبوضع كل من الاعداد الحقيقية a_i مساوياً لـ 1 في الطرفين . ■

هنالك نتائج أخرى للمبرهنة (3 − 4) . ونكتفي بما ذكرناه هنا .

ونعود الآن الى حساب عدد الاشجار المولدة في أي بيان موسوم .

لنفرض أن G بياناً موسوماً متصلاً خالياً من اللفات . وليكن D أي بيان موجه نحصل عليه من G باعطاء اتجاه كيفي لكل حافة في G . تكون T شجرة للبيان G اذا واذا فقط T شجرة للبيان الموجه D .

والآن نجد عدد الأشجار في D . لتكن B مصفوفة الوقوع للبيان D . لقد سبق أن بيّنا [انظر نتيجة (1 − 2)] أن مرتبة $\bar{B}$ هي (1 − n) . ولذلك . سنفرض أن B_1 هي مصفوفة ناتجة من B بحذف أي سطر . وليكن السطر الاخير . يطلق على B_1 مصفوفة الوقوع المختصرة (reduced incidence matrix) . بالطبع . مرتبة B_1 هي (n − 1) . لان كل (n − 1) من أسطر B تكون مستقلة خطياً . اذا كان v_n هو

رأس D الذي يقابل السطر الاخير في $\bar{B}$ ، فاننا سنطلق على v_n مصدراً (reference) لمصفوفة الوقوع المختصرة .

مبرهنة (3 – 5) : محدد أية مصفوفة جزئية مربعة بسعة (n – 1) من المصفوفة $\bar{B}_1$ يكون 0 ، 1 + ، أو 1 – .

البرهان : لنفرض ان M مصفوفة جزئية مربعة بسعة (n – 1) من المصفوفة $\bar{B}_1$ ولنفرض ان M غير انفرادية . اذاً ، $\det M \neq 0$ سوف نبرهن على أن $\det M = \pm 1$

لما كان كل عمود في $\bar{B}_1$ يحتوي على عنصر أو عنصرين غير صفريين 1 + ، 1 –. وان M غير انفرادية ، فان هنالك في M على الاقل عموداً واحداً فيه عنصر غير صفري واحد فقط. وان قيمته 1 + أو 1 – . وليكن ذلك في السطر والعمود j. وهكذا ، بنشر det M باستعمال العمود j ، نحصل على

$$\det M = \pm \det M_{ij},$$

حيث أن M_{ij} هي المصفوفة المربعة الناتجة من M بحذف السطر i والعمود j. وبتكرار تطبيق هذه الخطوة على M_{ij} . ثم الاستمرار على هذا المنوال . نتوصل أخيراً الى أن $\det M = \pm 1$ وبهذا يتم البرهان . ∎

مبرهنة (3 – 6) : لتكن M مصفوفة جزئية مربعة من مصفوفة الوقوع $\bar{B}$ للبيان الموجه D. اذا كانت أعمدة واسطر M تقابل ، بالترتيب ، حافات ورؤوس دارة بسيطة C ، فان $\det M = 0$.

البرهان : بما أن كل عمود في M يحتوي على عنصرين فقط غير صفريين أحدهما 1 + والاخر 1 – ، فان M انفرادية . وبذلك فان محددها يساوي صفراً . ∎

مبرهنة (3 – 7) : لتكن $\bar{B}_1$ مصفوفة الوقوع المختصرة للبيان الموجه المتصل الخالي من اللفات D. مصفوفة جزئية ، مربعة سعتها (n – 1) ، من المصفوفة $\bar{B}_1$. تكون غير انفرادية اذا واذا فقط كانت الحافات الموجهة التي تقابل أعمدتها تشكل شجرة مولدة

للبيان الموجه D .

البرهان : اذا كانت T أية شجرة مولدة لـ D . وأن M هي مصفوفة الوقوع المختصرة لـ $\bar{T}$ بالنسبة لنفس مصدر $\bar{B}_1$. فان M مربعة وسعتها $(n-1)$. كما أن M مصفوفة جزئية من $\bar{B}_1$. ولما كانت رتبة M هي $(n-1)$. فان M غير انفرادية . اذاً $\det M = \pm 1$ بموجب المبرهنة $(3-5)$.

والآن . نفرض ان P مصفوفة جزئية . مربعة سعتها $(n-1)$. من المصفوفة $\bar{B}_1$. وأن P غير انفرادية . اذاً . P مصفوفة جزئية من مصفوفة الوقوع $\bar{B}$ ، وأن أعمدتها مستقلة خطياً . وهكذا . بموجب المبرهنة $(3-6)$. فان الحافات التي تقابل أعمدة P لا تشكل كلها أو بعضاً منها دارة بسيطة في البيان الموجه D وعليه . فان الحافات التي تقابل أعمدة P تشكل بياناً جزئياً H من البيان D . وبنفس رؤوس D وخالياً من الدارات . ولما كان عدد هذه الحافات هو $(n-1)$. فانه بموجب (5) من المبرهنة $(3-1)$ تكون H شجرة مولدة لـ D . ■

تثبت المبرهنة الاخيرة وجود تقابل متباين بين الأشجار المولدة للبيان الموجه المتصل D والمصفوفات الجزئية المربعة غير الانفرادية بسعة $(n-1)$ لمصفوفة الوقوع المختصرة $\bar{B}_1$ لنفس البيان D . ولهذا أهمية كبيرة في تعداد الأشجار المولدة . كما هو مبين في المبرهنة الآتية .

مبرهنة $(3-8)$: عدد الأشجار المولدة للبيان الموجه المتصل الخالي من اللفات D يساوي محدد المصفوفة $\bar{B}_1 \bar{B}_1'$. حيث أن $\bar{B}_1$ هي مصفوفة الوقوع المختصرة لـ D . وان $\bar{B}_1'$ هي منقولة $\bar{B}_1$.

البرهان : بموجب مبرهنة بنيت –كوشي (Binet – Cauchy) :

$$\det(\bar{B}_1 \bar{B}_1') = \sum_i (\det M_i)(\det M_i') . \qquad \ldots\ldots (1)$$

حيث إن M_i هي مصفوفة جزئية مربعة بسعة $(n-1)$ من المصفوفة $\bar{B}_1$. وان M_i' هي المصفوفة الجزئية المربعة من B_1' المقابلة لـ M_i وعليه . فان أسطر M_i هي أسطر B_1' المقابلة لاعمدة M_i ولذلك فان $M_i' = M_i'$. وهكذا فان $M_i = \det M_i$

بموجب المبرهنتين (3 - 5) و(3 - 7) . فان $\det M_i = \pm 1$ اذا واذا فقط كانت أعمدة M_i تقابل حافات شجرة مولدة لـ D ، أي أن قيمة كل من الحدود غير الصفرية في المجموع (1) هي 1 وأن كلاً منها يقابل شجرة مولدة واحدة للبيان الموجه D وبذلك يتم البرهان . ■

لنفرض أن G بيان متصل بسيط . وأن D بيان موجه ناتج من G باعطاء اتجاه كيفي لكل حافة في G . لتكن

$$\Lambda = [\lambda_{ij}].$$

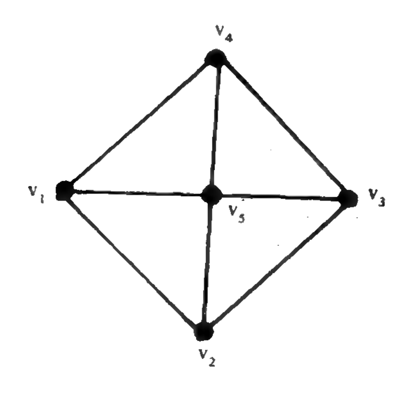
مصفوفة بسعة $n \times n$ فيها $\lambda_{ij} = -1$ اذا كان $i \neq j$ وكان الرأسان v_i و v_j متجاورين . و $\lambda_{ij} = 0$ اذا كان $i \neq j$ وكان الرأسان v_i و v_j غير متجاورين . و $\lambda_{ii} = \rho(v_i)$ في G . عندئذ يمكننا أن نبرهن على أن

$$\Lambda = \bar{B}\bar{B}'$$

حيث أن $\bar{B}$ هي مصفوفة الوقوع للبيان الموجه D [أنظر التمرين (6) من مجموعة تمارين (1 - 5)] . يطلق على Λ مصفوفة الاشجار . وهكذا . من تعريف مصفوفة الوقوع المختصرة . $\bar{B}_1$ ، وباستعمال المبرهنة (3 - 8) نحصل على النتيجة التالية :

نتيجة (3 - 7) : عدد الاشجار المولدة للبيان البسيط المتصل G يساوي قيمة المحيدد $\det \Lambda_i$. لأي عنصر قطري λ_{ii} في Λ .

مثال : جد عدد الاشجار لمولدة للبيان الموسوم المعطى في الشكل (3 - 14) .



شكل (3 - 14)

الحل : نكتب مصفوفة الاشجار Λ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ونأخذ المحيدد للعنصر في السطر الخامس والعمود الخامس . نحصل على

$$\det \Lambda_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 45$$

ملاحظة : يمكننا أن نعتبر أحد رؤوس البيان المعطى مصدراً . ثم نكتب المحيدد مباشرة آخذين جميع رؤوس البيان ما عدا المصدر .

تمارين (2 − 3)

(1) اثبت النتيجة (3 3) .

(2) اثبت المأخوذات (3 1) . (3 2) . (3 − 3) .

(3) اثبت انه اذا كانت $d_1 , d_2 , \ldots , d_n$ أعداداً صحيحة موجبة . فان هنالك شجرة موسومة رؤوسها هي $v_1 , v_2 , \ldots , v_n$ بحيث ان $\rho(v_i) = d_i$

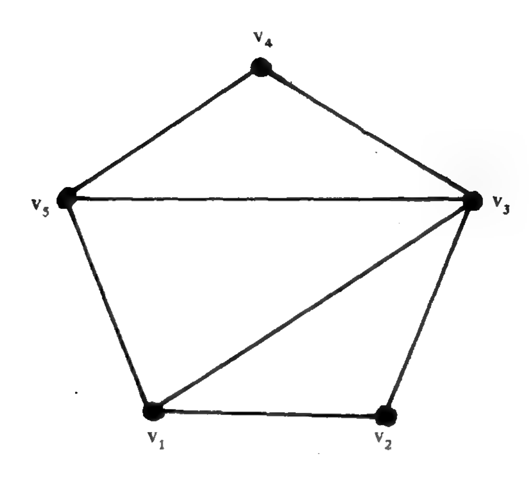
لكل $i = 1 , 2 , \ldots n$ اذا واذا فقط

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n \quad 1).$$

[تلميح : اثبت ان احد الاعداد $d_1 , d_2 , \ldots , d_n$ يجب أن يكون العدد 1. ثم

استخدم الاستقراء الرياضي على n.]

(4) جد عدد الاشجار المولدة للبيان المعطى في الشكل (3 - 15) .



شكل (3 - 15)

(5) إستخدم النتيجة (3 - 7) لاعطاء برهان ثان للنتيجة (3 - 5) .

(*6) ليكن $G = (V, E)$ بياناً بسيطاً . يقال ان ϕ تشاكل ذاتي (automorphism) للبيان G اذا وجد تطبيق متباين وشامل على مجموعة الرؤوس V بحيث ان $\phi(u) , \phi(v)$ متجاورين اذا واذا فقط كان الرأسان v و u متجاورين .

برهن على أن مجموعة جميع التشاكلات الذاتية للبيان G مع عملية تركيب التشاكلات تكون زمرة . يطلق على هذه الزمرة زمرة البيان G ويرمز لها $\Gamma(G)$.

برهن على أن الزمرتين $\Gamma(G)$ و $\Gamma(\bar{G})$ متشاكلتان .

(*7) ليكن G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n . اثبت أن عدد البيانات الموسومة غير المتشاكلة التي يمكن الحصول عليها من G . باعطاء الرموز $v_1 , v_2 , \ldots , v_n$ لرؤوسه . هو $(n!) / |\Gamma(G)|$. حيث أن $|\Gamma(G)|$ عدد عناصر الزمرة $\Gamma(G)$.

[تلميح : لاحظ أنه اذا كان G_1 أي بيان موسوم لـ G ، فان لكل ϕ ، $\phi \varepsilon \Gamma(G)$ ، يكون البيان الموسوم G_2 الناتج من G_1 بتطبيق ϕ متشاكلاً مع G_1.]

(3 – 3) أشجار القياس الكلي الاصغر

ان لنظرية البيانات تطبيقات كثيرة جداً وفي مواضيع عديدة ومتنوعة ، وسوف نأتي الى شرح بعض تلك التطبيقات في الفصل السادس . وقد لانكون مبالغين اذا قلنا ان في معظم تلك التطبيقات تلعب الاشجار دوراً أساسياً . ولقد وجدنا من الضروري الاشارة في هذا البند الى بعض الاستعمالات المباشرة للاشجار ، ونذكر فيما يلي شرحاً موجزاً لاستعمالين فقط .

(أ) لنفرض أن المطلوب انشاء شبكه طرق تصل بين مجموعة من المدن بحيث أن هنالك درب واحد فقط يصل بين كل مدينتين ، علماً بان لدينا طول المسافة بين كل مدينتين . ومن ناحيه أقتصادية . نحتاج الى أن نبحث عن تلك الشبكة من الطرق بحيث يكون مجموع المسافات . اي مجموع أطوال تلك الطرق ، أقصر مايمكن . لما كانت شبكة الطرق متصلة ويوجد فيها درب واحد فقط بين كل مدينتين ، فيجب ان تكون على هيئة شجرة [بموجب (2) من المبرهنة (3 – 1)]

تعرف دألة قياس (measure) حافات بيان G على انها دالة μ من مجموعة حافات G الى مجموعة من اعداد حقيقية غير سالبة . فاذا كانت e_i حافة في G ، فان $\mu(e_i)$ هو قياس e_i .

باستعمال مفهوم دالة القياس يمكننا ان نصوغ المسائل من النوع المذكور فيما تقدم بصيغة اكثر شمولية كالآتي :

« يطلب ايجاد شجرة مولدة لبيان متصل موسوم علمت قياسات حافاته بحيث ان مجموع قياسات الحافات في تلك الشجرة أصغر مايمكن . »

يمكن أن يفسر قياس الحافة بانه طول الطريق الذي تمثله ، أو الزمن لانجاز عمل من مرحلة الى اخرى (المراحل هنا تمثل بالرؤوس) . وقد يفسر القياس بانه كلفة انشاء الطريق ، اوكلفة قطع المسافة بين مدينتين ولذلك ، فان استخدام كلمة « القياس » يعطي لهذه المسألة بعض الشمولية في التطبيق . يطلق أحياناً على هذه المسألة « مسألة الموصل الاصغر "minimal connector problem" .

ملاحظة : يمكننا أحيانا ان نقبل بوجود القياس السالب . ولكن يجب أن لايحتـوي البيان على دارة مجموع قياسات حافاتها عدد سالب . وذلك لأجل أن يكون هنالـك معنى تطبيقي للمسألة .

يقصد **بالقياس الكلي لشجرة** T مجموع قياسات حافات T . وسنرمز لذلـك بـ $\mu(T)$ ؛ وبذلك فان

$$\mu(T) = \sum_{e_i \in E(T)} \mu(e_i).$$

حيث ان $E(T)$ هي مجموعة حافات T .

لما كان عدد الاشجار المولدة لبيان متصل كبيراً . فان إيجاد شجرة ذات أصغر قياس كلي عن طريق ايجاد كل الاشجار المولدة هوعملية مطولة جداً ، ولذلك فقد أوجد كروسكال (J. B. Kruskal) سنة 1956 طريقة مختصرة لايجاد شجرة القياس الكلي الأصغر . وتتلخص طريقة كروسكال بما يأتي :
نبدأ بحافة من G يكون لها أصغر قياس . ولتكن الحافة e_1 . ثم نأخذ تباعاً الحافات $e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$ بحيث نختار في كل مرحلة حافة لم يسبق اختيارها وبحيـث تكون باصغر قياس نسبة لماتبقى من حافات في G . وبحيث أنها لاتشكل دارة مـع بعض الحافات التي تم اختيارها . وعندئذيكون البيان الجزئي T المكون من الحافات $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ التي تم اختيارها بهذه الطريقة شجرة مولدة لـ G ذات أصغر قياس كلي .

والان . نبرهن على صحة طريقة كروسكال .

لما كانت T تتكون من n من الرؤوس و (n-1) من الحافات وخالية من الدارات . فان T شجرة مولدة للبيان G ، وذلك بموجب (5) مـن المبرهنه (3 - 1). بقي ان نبرهن على ان $\mu(T)$ أصغر مايمكن .

لتكن S أية شجرة مولدة للبيان G . سنبرهن على أن

$$\mu(T) \leq \mu(S).$$

واضح من الطريقة ان

$$\mu(e_1) \leqq \mu(e_2) \leqq \dots \leqq \mu(e_{n-1}).$$

لنفرض أن e_k هي أول حافة في المتتابعة $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ التي لاتنتمي الى الشجرة المولدة S . البيان الجزئي المتكون من S مع الحافة e_k يحتوي على دارة وحيدة C [بموجب (6) من المبرهنة(3 - 1)]. وهذه الدارة تحتوي على حافة e من S لاتنتمي الى T . اذاً ، البيان الجزئي S_1 الناتج من S باضافة e_k وازالة e هو شجرة مولدة للبيان G . واستناداً الى طريقة ايجاد T ، فان $\mu(e_k) \leqq \mu(e)$ ، وعليه فان

$$\mu(S_1) \leqq \mu(S).$$

إضافة الى ذلك، فان S_1 تشترك مع T بحافة واحدة زيادة على الحافات المشتركة بين S_1 ، T .

وبتكرار هذه العملية على S_1 نحصل على S_2 بحيث إن

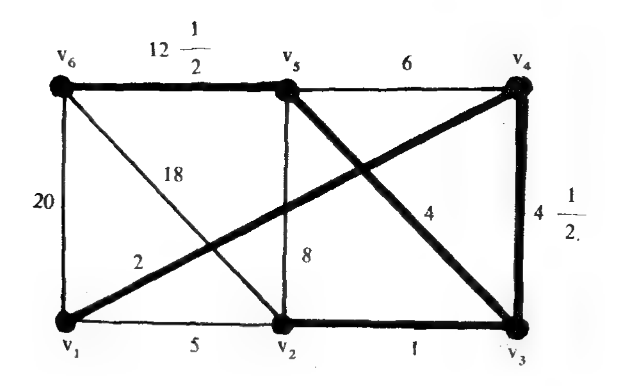
$$\mu(S_2) \leqq \mu(S_1).$$

وهكذا ، نستمر بهذه العملية حتى نتوصل الى T بتحويلات شجرية متتابعة[انظر تمرين (9) من مجموعة التمارين (3 - 1)]. ولما كان، في كل تحويل شجري، القياس الكلي للشجرة الناتجة لايزيد على القياس الكلي للشجرة السابقة لها، فان

$$\mu(T) \leqq \mu(S).$$

وبما أن S أية شجرة مولدة لـ G ، فان $\mu(T)$ أصغر مايمكن، وأن T هي شجرة القياس الكلي الأصغر. ∎

مثال (1) : جد شجرة القياس الكلي الأصغر للبيان الموسوم G المبين في الشكل (3 - 16)، علماً بأن الاعداد المثبتة على الحافات هي قياساتها.



شكل (3 - 16) .

الحل: لما كان 1 هو أصغر قياسات الحافات، فاننا نأخذ $\bar{e}_1$ على أنها الحافة $[v_2 , v_3]$. ولما كان القياس الاصغر الذي يلي 1 هو 2. فان e_2 هي الحافة $[v_1 , v_4]$، وذلك لأن هاتين الحافتين لاتشكلان دارة. وهكذا. نستمر حتى نحصل على الشجرة المولدة T التي حافاتها. حسب ترتيب ايجادها. هي

$$[v_2 , v_3] , [v_1 , v_4] , [v_3 , v_5] , [v_3 , v_4] , [v_5 , v_6] .$$

والتي قياسها الكلي 24 . وقد رُسمت حافاتها بخطوط سميكة.

(ب) نشرح الآن مسألة مشابهة بعض الشيء للمسألة المذكورة في (أ)، ولكنها تخص البيانات الموجهة.

ليكن $D = (V, A)$ بياناً موجهاً متصلاً بسيطاً. وليكن v_o رأساً معيناً في D ، يطلق عليه مصدر البيان D . يقال لرأس w إنه قابل الوصول (reachable) من v_o اذا وجد في $\bar{D}$ درب موجه، واحد على الأقل، من المصدر v_o الى الرأس w .
لنفرض أن هنالك دالة قياس معرفة على الحافات الموجهة للبيان D ، أي أن لكل حافة موجهة (u, v) في D معرفاً لها قياس $\mu(u, v)$ وهو عدد حقيقي سالب، موجب، أو صفر. وسنفرض ان لكل دارة موجهة C في D يكون $\mu(C) \geqq 0$ ، حيث أن $\mu(C)$ هو مجموع قياسات الحافات الموجهة في الدارة C .

المسألة هنا تنص على أنه اذا كان w رأساً قابل الوصول من المصدر v_o ، فاوجد درباً موجهاً P من v_o الى w بحيث إن مجموع قياسات حافاته، $\mu(P)$ ، أصغر ما يمكن نسبة الى كل الدروب الموجهة من v_o الى w. يطلق على مثل هذا الدرب، وهو بالطبع موجود دائماً، أقصر درب موجه من v_o الى w.

سوف نشرح فيما يلي مسألة أعم من مسألة إيجاد أقصر درب موجه، وهي مسألة إيجاد شجرة جذرية T ، جذرها المصدر v_o ، بحيث إن الدرب الموجه الوحيد من v_o الى أي رأس، w، فيها هو أقصر درب موجه من v_o الى w. يطلق على مثل هذه الشجرة شجرة القياس الاصغر نسبة الى المصدر v_o. إضافة الى ذلك، سنعطي طريقة لايجاد شجرة القياس الاصغر نسبة الى المصدر v_o بحيث إنها تحتوي على كل رؤوس D القابلة الوصول من v_o ، وسوف نطلق على مثل هذه الشجرة شجرة القياس الأصغر العظمى نسبة الى المصدر v_o. سوف نبين ان لكل بيان موجه بسيط D مع أية دالة قياس μ للحافات التي تحقق $\mu(C) \geqq 0$ ، لكل دارة موجهة C في D ، فانه يوجد في D واحدة على الأقل من اشجار القياس الاصغر العظمى نسبة الى مصدر v_o. قبل ذكر ذلك، نحتاج الى إثبات المبرهنة الآتية.

مبرهنة (3 - 9): لتكن T شجرة جذرية، جذرها v_o، في بيان موجه متصل بسيط $D = (V, A)$، تحتوي على كل رأس قابل الوصول من v_o. لكل رأس u في T، نرمز لقياس الدرب الموجه الوحيد من v_o الى u في T بالرمز $L(u)$. ونعتبر $L(v_o) = 0$. عندئذ، تكون T شجرة القياس الاصغر العظمى نسبة الى المصدر v_o اذا واذا فقط. لكل وتر (u, w) الذي رأساه $u، w$ في T يكون

$$L(w) \leqq L(u) + \mu(u, w). \qquad \dots (1 - 3).$$

البرهان: اذا كان، لأجل وتر ما (u, w) ،

$$L(w) > L(u) + \mu(u, w).$$

فان الدرب الموجه من v_o الى u في T مع الوتر (u, w) يكون ذا قياس $L(u) + \mu(u, w)$. ولما كان هذا أصغر من $L(w)$. فان قياس الدرب الموجه من v_o الى w في T ليس الأقصر. وبذلك. فان T ليست شجرة القياس الاصغر نسبة الى المصدر v_o.

وبالعكس ، دعنا نفرض أن T ليست شجرة القياس الاصغر. اذاً، يوجد رأس v في T بحيث إن قياس الدرب الشجري من v_o الى v ليس الاقصر. لذلك، نفرض أن الدرب الموجه

$$P_k = (a_1 , a_2 , \dots , a_k)$$

هو أقصر درب موجه من v_o الى v في D . لتكن $a_{i+1} = (v_i , v_{i+1})$ هي الحافة الموجهة الاولى في المتتابعة $a_1 , a_2 ,\dots, a_k$ التي لاتنتمي الى T بحيث إن $L (v_{i+1}) > \mu (P_{i+1})$ ، حيث إن

$$P_{i+1} = (a_1 , a_2 , \dots , a_{i+1}) .$$

بالطبع ، هكذا حافة موجهة موجودة لأن P_k أقصر من الدرب الموجه من v_o الى v في T بالفرض. ولما كان $L (v_i) = \mu (p_i)$ ، فان

$$L (v_{i+1}) > L (v_i) + \mu (a_{i+1}) .$$

وعليه، فقد وجدنا وتراً، a_{i+1} ، بحيث ان رأسيه v_i , v_{i+1} يحققان المتباينة.

$$L (w) > L (u) + \mu (u, w).$$

وبهذا يتم البرهان. ∎

هذه المبرهنة تزودنا بالقاعدة النظرية التي تستند اليها طريقة الحصول على شجرة القياس الاصغر العظمى نسبة الى المصدر v_o بشرط أن $\mu (C) \geqq 0$ لكل دارة موجهة C في البيـان الموجه. والطريقة تتكون من تكرار الخطوة الثانية من الخطوتين الآتيتين :

(1) نأخذ شجرة جذرية T_o ، جذرها v_o ، بحيث تحتوي على كل الرؤوس القابلـة الوصول من v_o .

(2) بصورة عامة، عندما نحصل على T_i ، نفرض ان $L_i(v)$ يرمز لقياس الدرب الموجه الوحيد من v_o الى v في T_i . اذا كان كل وتر (u, w) لـ T_i يحقق المتباينة

$$L_i (w) \leqq L_i (u) + \mu (u, w) ,$$

فان T_i هي شجرة القياس الاصغر العظمى. وذلك بموجب المبرهنة (3 - 9) ؛

وعند ذلك تنتهي الطريقة ونكون قد حصلنا على الشجرة المطلوبة. أما اذا وجد وتر (u^*, w^*) بحيث ان

$$L_i(w^*) > L_i(u^*) + \mu(u^*, w^*), \qquad \dots (2-3)$$

فعندئذ نحصل من T_i على شجرة جذرية T_{i+1} باضافة الوتر (u^*, w^*) الى T_i وازالة منها الحافة الموجهة التي رأسها النهائي هو w^*. لما كانت T_i جذرية جذرها v_o وأن $\mu(C) \geqq 0$ لكل دارة موجهة C ، فان T_{i+1} جذرية جذرها v_o أيضاً.
بعد ذلك نكرر الخطوة (2) بأخذ $i+1$ بدلاً من i.
لكل رأس v قابل الوصول من v_o ، فان المتتابعة $L_0(v), L_1(v), \dots$ غير متزايدة. اضافة الى ذلك ، في كل مرحلة i ،

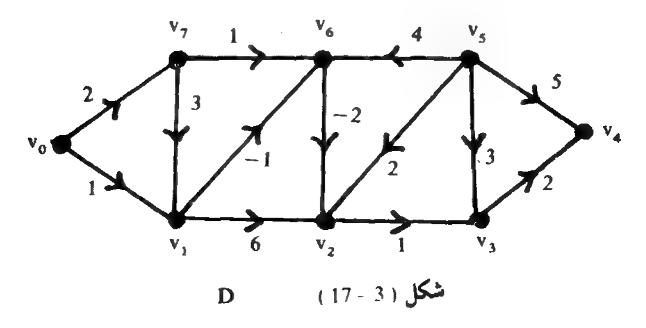
$$L_i(v) < L_{i-1}(v)$$

لرأس v واحد على الأقل (كالرأس w^* المذكور في الخطوة (2) أعلاه). وأخيراً، فان القيم $L_i(v)$ مقيدة من الاسفل، لأنه لاتوجد دروب من v_o الى v بقياسات صغيرة لانهائياً، بسبب الشرط $\mu(C) \geqq 0$ لكل دارة موجهة C . هذه الملاحظات سوية توصلنا الى شجرة جذرية، T_j ، بحيث ان لكل وتر، (u, w) ، من اوتارها،

$$L_j(w) \leqq L_j(u) + \mu(u, w).$$

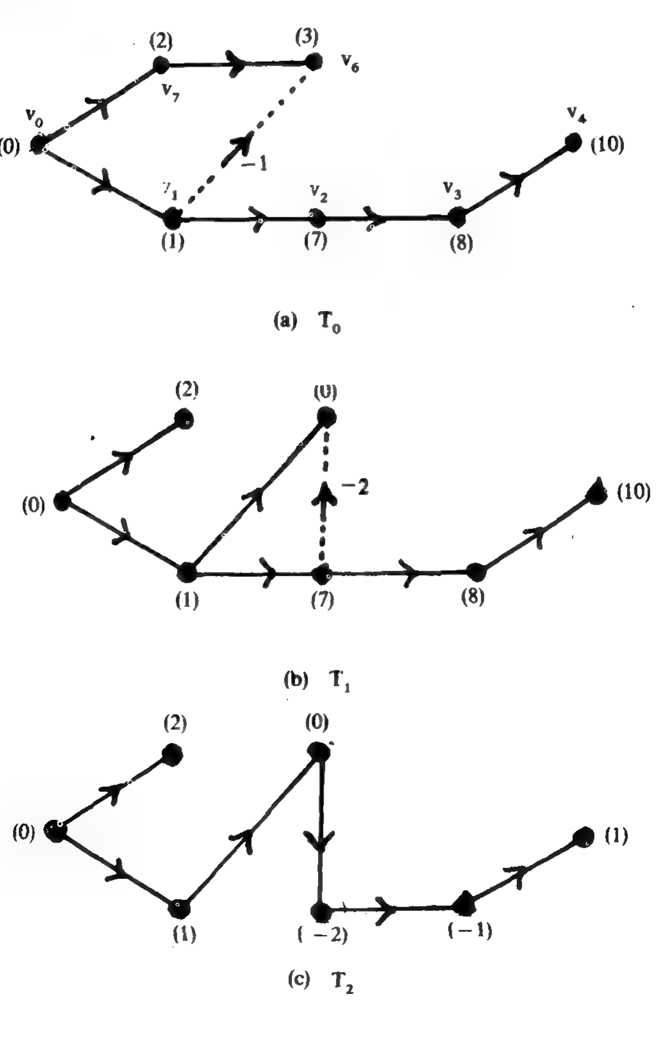
عندئذ، بموجب المبرهنة (3 - 9). تكون T_j شجرة القياس الأصغر العظمى نسبة الى المصدر v_o.

مثال (2) : جد شجرة القياس الاصغر العظمى نسبة الى المصدر v_o للبيان الموجه D ، المؤشر عليه قياسات الحافات، والمبين في الشكل (3 - 17).



شكل (3 - 17) D

الحل: نبدأ بالشجرة T_o المبينة في (a) من الشكل (3 – 18)، وهي شجرة تحتوي على كل الرؤوس القابلة الوصول من المصدر v_o، وقد رسم منقطاً الوتر (v_1, v_6) الذي يحقق المتباينة (3 – 2)، وقد كتب قياس كل رأس، $L_o(v_i)$. وهكذا نحصل على T_1 المبينة في (b) من الشكل (3 – 18). ومن ثم نستمر حتى نحصل على T_2 في (c) من نفس الشكل. وبعد فحص كل أوتار T_2، نجد أنها تحقق المتباينة (3 – 1). وهكذا، بموجب المبرهنة (3 – 9)، تكون T_2 هي شجرة القياس الاصغر العظمي.



شكل (3 - 18)

من المسائل المعروفة والمتضمنة إيجاد أقصر مسار هي مسألـة البـائـع المتجــول (travelling salesman problem) وهي تتلخص بما يأتي: «بائع متجول يرغب بزيارة n من المدن المعينة، فكيف يمكنه زيارة كل من هذه المدن مرة واحدة علـى الأقل ثم يعود الى نقطة إنطلاقه وبحيث تكون المسافة الكلية التي يقطعها في سفره أصغر مايمكن ؟في المثال (1) ، المسار الاقصر (أي الاصغر قياساً) لرحلة البائع المتجــول هـو $(v_1 , v_2 , v_3 , v_5 , v_6 , v_5 , v_4 , v_1)$ ، ويكون الطول الكلي لهذا المسار هو 43 ، ونلاحظ ان البائع مر بالرأس v_5 مرتين لأجل أن يقطع أقل مسافة. إن تطبيقات هــذه المسألة كثيرة، ولكن لا توجد في الوقت الحاضر طريقة عامة وجيدة لحلها.

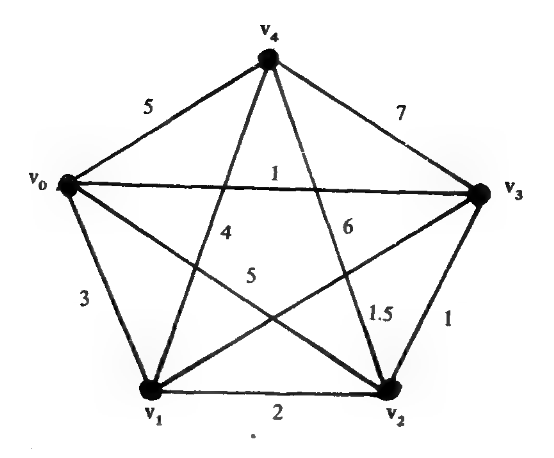
تمارين (3 – 3)

(1) جد شجرة القياس الكلي الاصغر للبيان G المبين في الشكل (3 – 19) .

(2) جد طريقة أخرى غير طريقة كروسكال للحصول على شجرة القياس الكلي الاصغر لبيان متصل G ، تستند الى ازالة الحافة ذات القياس الاكبر من G ، ثم تستمر على هذا المنوال حتى تحصل على شجرة مولدة ذات قياس كلي أصغر. إثبـت صحة هذه الطريقة، ثم استعملها في حل التمرين (1) .

(3) إثبت انه يمكن استعمال الطريقة المذكورة في التمرين (2) لأجل الحصول على شجرة مولدة لبيان متصل G . [تلميح: إعتبر كل الحافات ذات قياس واحد.]

(4) جد المسار الاقصر لرحلة بائع متجول اذا علمت أن خارطة المدن التي سوف يزورها ممثلة في البيان المعطى في الشكل (3 – 19) .



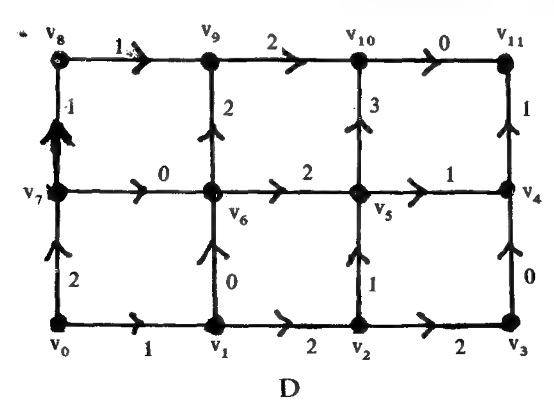
شكل (3 – 19)

(5) اذا كان $P_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ أقصر درب موجه من المصدر v_o الى الرأس v_k في بيان موجه بسيط ، فان.

$$p_j = (a_1, a_2, \ldots, a_j)$$

هو أقصر درب موجه من v_o الى v_j لكل $j = 1,2\ldots,k$ علماً بأن $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ لكل $i = 1,2\ldots,k$

(6) جد شجرة القياس الكلي الاصغر العظمى نسبة الى المصدر v_o للبيان الموجه D المؤشر عليه قياسات حافاته والمعطى في الشكل (3 – 20) .



شكل (3 – 20)

(7) ليكن D بياناً موجهاً مع دالة القياس μ لكل من حافاته الموجهة بحيث ان لكل دارة موجهة C يكون $\mu(C) \leqq 0$. اجر التعديلات اللازمة على طريقة استخراج شجرة القياس الكلي الاصغر العظمى لاجل وصف خطوات الحصول على شجرة القياس الكلي الاكبر العظمى (أي شجرة تحتوي على كل الرؤوس القابلة الوصول من المصدر v_o بحيث ان الدرب الموجه الوحيد فيها من v_o الى أي رأس يكون باكبر قياس ممكن) .

(8) استخدم التمرين (7) للحصول على شجرة القياس الكلي الاكبر العظمى نسبة الى المصدر v_o للبيان الموجه D المعطى في الشكل (3 – 20) .

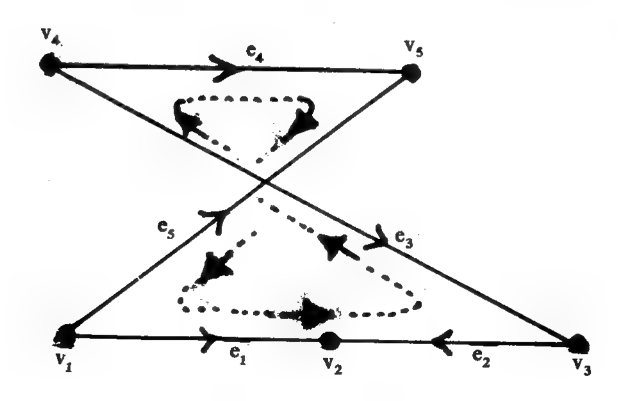
(3 – 4) مصفوفات الدارات والمجموعات القاطعة للبيانات الموجهة :

سوف نحتاج في الفصل السادس الى استخدام مصفوفات الدارات والمجموعات القاطعة للبيانات الموجهة . ولذلك نجد من الضروري شرحها هنا لاعتمادها على مفهوم الاشجار .

نعين لكل دارة بسيطة (لايشترط ان تكون موجهة) في البيان الموجه المتصل D « اتجاهاً » يتفق مع ترتيب حافاتها الموجهة في المتتابعة التي تمثلها ، أوبالترتيب المعاكس لذلك ، كما هو موضح في الشكل (3 – 21) بالنسبة للدارة

$$C = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1),$$

حيث ان الخط المنقط ، مع الاسهم التي عليه ، يمثل اتجاه الدارة C بما يتفق وترتيب حافاتها في المتتابعة .



شكل (3 – 21)

لتكــن $e_1, e_2, \ldots, e_m$ الحافــات الموجهـــة للبيـــان الموجه D ، ولتكن $C_1, C_2, \ldots, C_l$ الدارات البسيطة في D . تعرف مصفوفة دارات D بانها المصفوفة $\bar{C} = [c_{ij}]$ بسعة $l \times m$ بحيث أن السطر i يمثل الدارة C_i والعمود j يمثــل الحافة الموجهة e_j ، لكل $i = 1, 2, \ldots, l, j = 1, 2, \ldots, m$ ، وان

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{اذا كانت } e_j \text{ في } C_i \text{ وان اتجاه } e_j \text{ متفق مع اتجاه } C_i \\ -1, & \text{اذا كانت } e_j \text{ في } C_i \text{ وان اتجاه } e_j \text{ معاكس لاتجاه } C_i \\ 0, & \text{اذا لم تكن } e_j \text{ في } C_i \end{cases}$$

لتكن T شجرة مولدة للبيان الموجه المتصل D . اذا اخذنا اتجاه كل دارة مــن النظام الاساسي للدارات المشاركة مع T متفقاً مع اتجاه الوترالذي فيها ، نجد ان المصفوفة $\bar{C}$ تحتوي على مصفوفة جزئية مربعة واحدية بسعة $(m - n + 1)$. لذلك ، فــان لدينا المأخوذة المباشرة الآتية :

مأخوذة (4 – 3) : مرتبة مصفوفة الدارات للبيان الموجه المتصل الذي عدد رؤوسه n وعدد حافاته m لاتقل عن $(m - n + 1)$.

مبرهنة (10 – 3) : اذا أخذت أعمدة مصفوفة الوقوع $\bar{B}$ واعمدة مصفوفة الدارات $\bar{C}$ للبيان الموجه المتصل D بنفس الترتيب لحافاته ، فان

$$\bar{B}\,\bar{C}' = \bar{O} \quad , \quad \bar{C}\,\bar{B} = \bar{O}$$

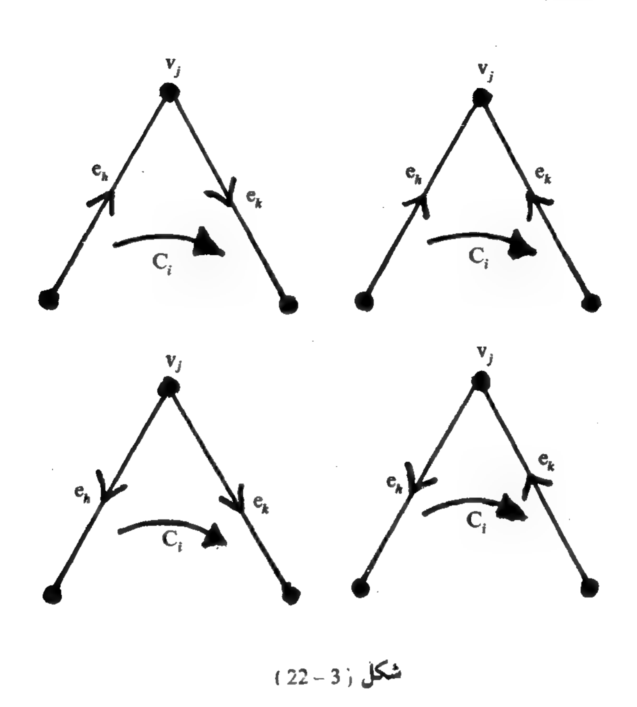
حيث أن $\bar{O}$ مصفوفة صفرية ، وان $\bar{B}'$ منقولة $\bar{B}$ و $\bar{C}'$ منقولة $\bar{C}$.

البرهان : اذا لم تكن الدارة C_i محتوية على الرأس v_j فان حاصل ضرب السطر ذي الرقم i من $\bar{C}$ مع السطر ذي الرقم j من B يساوي صفراً . واذا كانت الدارة C_i محتوية على الرأس v_j ، فان لدينا أربع حالات بالنسبة الى اتجاهي الحافتين e_h و e_k في C_i الواقعتين على الرأس v_j ؛ وهذه الحالات مبينة في الشكل (3 – 22) .

ولكل من هذه الحالات الاربع ، نجد أن

$$c_{ih} b_{jh} + c_{ik} b_{jk} = 0$$

لذلك ، فان حاصل ضرب السطر ذي الرقم i من $\bar{C}$ مع السطر ذي الرقم j من $\bar{B}$ (أي العمود ذي الرقم j من $\bar{B}'$) يساوي صفراً . وبهذا يتم البرهان .



شكل (3 - 22)

مبرهنة (3 - 11) : مرتبة مصفوفة الدارات للبيان الموجه المتصل الذي عدد رؤوسه n وعدد حافاته $\bar{\bar{m}}$ هي $(m - n + 1)$.

البرهان : ينص قانون سيلفستر للصفرية Sylvester's law of nullity) على : « اذا كانت P مصفوفة بسعة $p \times r$ و Q مصفوفة بسعة $q \times r$ ، واذا كانت $PQ' = \bar{O}$ ، فان

$$(P \text{ مرتبة}) + (Q \text{ مرتبة}) \leqq r .$$

بما أن

$$\bar{C} \; \bar{B}' = \bar{\bar{O}} ,$$

بموجب المبرهنة (3 - 10) ، وباستعمال قانون سيلفستر للصفرية ، فان

$$(\bar{C} \text{ مرتبة}) + (\bar{B} \text{ مرتبة}) \leqq m .$$

ولما كانت مرتبة المصفوفة B هي $(n - 1)$ ، فان

$$(\bar{C} \text{ مرتبة}) \leq m - n + 1.$$

وهكذا ، باستعمال المأخوذة (3 - 4) ، نجد أن مرتبة $\bar{C}$ هي $(m - n + 1)$.

نشرح فيما يأتي مصفوفة المجموعات القاطعة للبيانات الموجهة .

لتكن S مجموعة قاطعة للبيان الموجه المتصل D ، ولتكن V_1, V_2 مجموعتي رؤوس مركبتي $D - S$. يمكننا أن نعين لـ S اتجاهاً أما من V_1 الى V_2 أومن V_2 الى V_1 . ولذلك سنفرض أن لكل مجموعة قاطعة للبيان اتجاهاً معيناً .

لتكن $e_1, e_2, \ldots, e_m$ حافات D ، ولتكن $S_1, S_2, \ldots, S_t$ المجموعات القاطعة للبيان الموجه D . تعرف مصفوفة المجموعات القاطعة لـ D بانها المصفوفة $K = [k_{ij}]$ ذات السعة $t \times m$ بحيث ان السطر i يمثل المجموعة القاطعة S_i ، $i = 1, 2, \ldots, t$ ، وان العمود j يمثل الحافة الموجهة e_j ، $j = 1, 2, \ldots, m$ ، و

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{اذا كان } e_j \text{ في } S_i \text{ واتجاه } e_j \text{ متفقاً مع اتجاه } S_i \\ -1, & \text{اذا كان } e_j \text{ في } S_i \text{ واتجاه } e_j \text{ معاكساً لاتجاه } S_i \\ 0, & \text{اذا لم يكن } e_j \text{ في } S_i \end{cases}$$

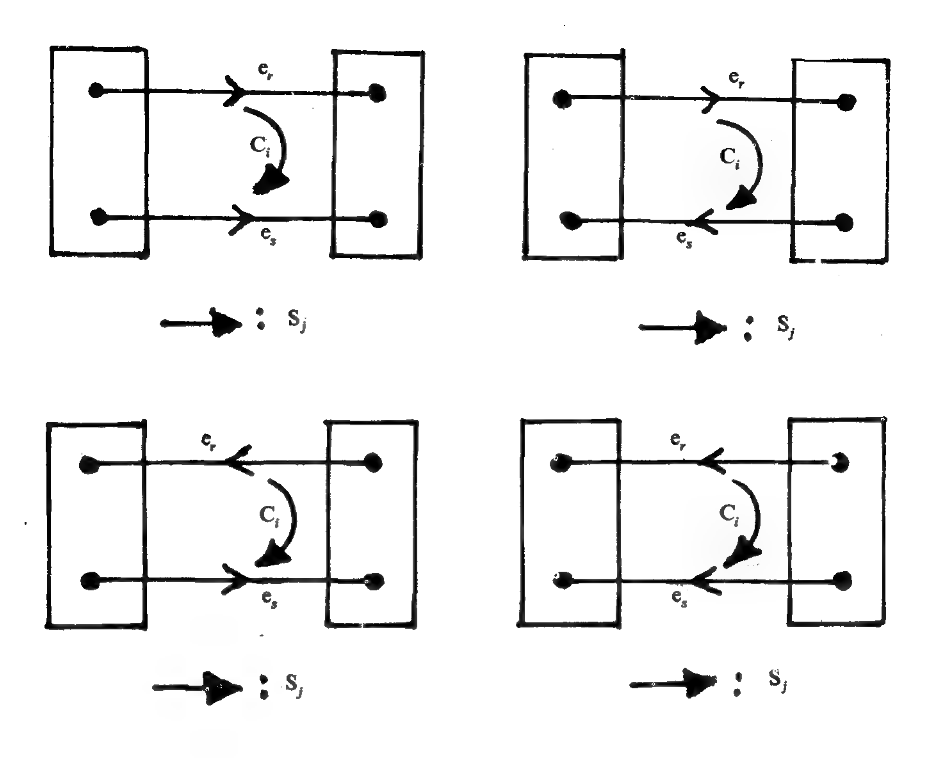
مبرهنة (3 - 12) : اذا كانت $\bar{K}$ مصفوفة المجموعات القاطعة و C مصفوفة الدارات لبيان موجه D بحيث ان ترتيب الاعمدة في كليهما هوبنفس الترتيب للحافات ، فان

$$\bar{K}\,\bar{C}' = \bar{O}, \qquad C\,K' = \bar{O}.$$

البرهان : اذا كانت e_r حافة موجهة مشتركة بين الدارة C_i والمجموعة القاطعة S_j في D ، وان e_s أول حافة موجهة مشتركة بينهما تأتي بعد e_r عندما نمر حول C_i بالاتجاه المعين لها ، فان لدينا أربع حالات لاتجاهي e_s و e_r ، وهي مبينة في الشكل (3 - 23) . لكل من هذه الحالات ، نجد أن

$$c_{ir}k_{jr} + c_{is}k_{js} = 0$$

ولما كان عدد الحافات الموجهة المشتركة بين C_i و S_j هوعدد زوجي ، فان حاصل ضرب السطر i من $\bar{C}$ مع السطر j من $\bar{K}$ يساوي صفراً . وبهذا يتم البرهان . ■



شكل (3 − 23)

واضح انه اذا كان D متصلاً وغير قابل للانفصال ، فان مصفوفة الوقوع $\bar{B}$ لـ $\bar{D}$ هي مصفوفة جزئية من مصفوفة المجموعات القاطعة $\bar{K}$. اما اذا كان D قابلاً للانفصال ، فان أسطر $\bar{B}$ هي تشكيلات خطية لاسطر $\bar{K}$. وبما أن مرتبة $\bar{B}$ هي $(n - 1)$ ، فان مرتبة $\bar{K}$ لاتقل عن $(n - 1)$.

من جهة اخرى ، باستعمال المبرهنتين (3 − 11) و (3 − 12) مع قانـــون سيلفستر للصفرية ، نستنتج ان مرتبة $\bar{K}$ لاتزيد على $(n - 1)$. وهكذا نتوصل الى المبرهنة الآتية .

<u>مبرهنة (3 − 13)</u> : اذا كانت $\bar{K}$ مصفوفة المجموعات القاطعة لبيان موجـــه متصل عدد رؤوسه $\bar{n}$ ، فان مرتبة $\bar{K}$ هي $(n - 1)$.

لتكن T شجرة مولدة لبيان موجه متصل D عدد رؤوسه n وعدد حافاته الموجهة m . ولتكن $e_1, e_2, \ldots, e_{m-n+1}$ أوتار T ، ولتكن $e_{m-n+1}, e_{m-n+2}, \ldots, e_m$ أغصان T . ولتكن C_i الدارة الاساسية (اي في النظام الاساسي للدارات المشاركة مع T) الناشئة من اضافة الوتر e_i الى الشجرة T ، لكل $i = 1,2,\ldots,m - n + 1$. ولتكن S_j المجموعة القاطعة الاساسية نسبة الى الغصن e_j للشجرة T ، لكل $j = m - n + 2, \ldots, m$. عندئذ يمكن كتابة مصفوفة الدارات الاساسية بالصيغة

$$\bar{C}_f = [U_{m-n+1} \quad \bar{C}_{f12}] ,$$

حيث ان U_{m-n+1} هي مصفوفة واحدية بسعة $(m - n + 1)$.
كما يمكن كتابة مصفوفة المجموعات القاطعة الاساسية بالصيغة

$$K_f = [K_{f11} \quad U_{n-1}] ,$$

حيث ان U_{n-1} هي مصفوفة واحدية بسعة $(n - 1)$
باستعمال المبرهنه (3 – 12) ، نتوصل الى $\bar{C}_f K'_f = \bar{O}$ ،
وهي تؤدي الى

$$[U_{m-n+1} \quad C_{f12}] \begin{bmatrix} \bar{K}'_{f11} \\ \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \bar{O} ,$$

أي أن

$$K'_{f11} + \bar{C}_{f12} = \bar{O}$$

وهكذا ، فان

$$\bar{K}_{f11} = - C'_{f12} \qquad \ldots(3 - 3)$$

تمارين (3 – 4)

(1) اذا كانت T الشجرة المولدة للبيان الموجه D المعطى في الشكل (3 – 6) ، فاكتب كلاً من $\bar{C}_f$ و $\bar{K}_f$ ، وتحقق من صحة (3 – 3) نسبة لهذه الشجرة .

(2) برهن على أن مرتبة مصفوفة الدارات لبيان موجه عدد رؤوسه n ، وعدد حافاته الموجهة m وعدد مركباته k هي $(m - n + k)$.

(3) برهن على ان مرتبة مصفوفة المجموعات القاطعة لبيان موجه عدد رؤوسه n وعدد مركباته k هي $(n - k)$.

الفصل الرابع

البيانات المستوية
(Planar Graphs)

لقد سبق ان شرحنا في البند (1 – 7)غمر البيانات ، وتعرضنا لذكر البيانات المستوية، وهي البيانات التي يمكن غمرها في المستوي. فالبيان المستوي هو بيان يمكن رسمه في المستوي بحيث لايوجد تقاطع بين أية حافتين في نقطة ليست رأساً لأحدى أوكلتا الحافتين. كما سبق أن بينا أن البيان المستوي يمكن غمره في سطح الكرة، وأن كل بيان مغمور في سطح الكرة هو بيان مستوٍ[مبرهنة(1 – 5)]. كما أثبتنا أن كل بيان يمكن عمرة في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد R^3. وفي هذا الفصل سوف نشرح بعض خصائص وميزات البيانات المستوية، كما سوف نثبت الشروط الضرورية والكافية لكي يكون بيانا ما مستوياً.

سوف يتضمن البند(4 – 1)من هذا الفصل صيغة أويلر التي هي العلاقة الثابتة بين عدد الرؤوس، عدد الحافات، وعدد المناطق لبيان مستوٍ. باستخدام هذه الصيغة. سوف نثبت ان البيانين K_5 , $K_{3,3}$ غير مستويين، وسوف نرى كيف أن هذين البيانين يلعبان دوراً رئيساً في البيانات غير المستوية كما تنص على ذلك مبرهنة كورَتوفسكي في البند. (4 – 2)

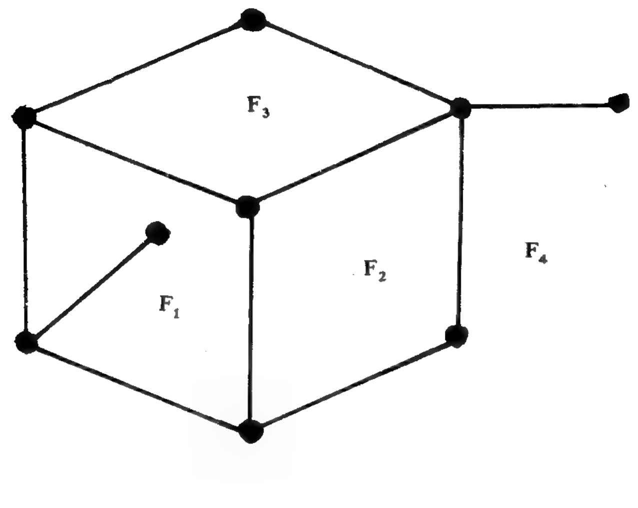
يعالج البند(4 – 4) مواضيع الجنس والسمك وعدد التقاطعات في البيانات.

وفي البند(4 – ٥). نشرح الأثنينية في البيانات المستوية. وأخيراً نختم الفصل بمبرهنة وايتني في البيانات المستوية.

(4 – 1) صيغة أويلر للبيانات المستوية

عندما يغمر بيان مافي مستوٍ. يتجزأ ذلك المستوي الى مناطق. يطلق على كل منها وجه (face) أومنطقة (region) لذلك البيان. وفي هذه التجزئة. يطلق على المنطقة غير المحدودة الوجه الخارجي (the exterior face) أو الوجه غير المحدود

(unbounded face). ففي البيان المستوي المبين في الشكل (4 - 1) لدينا أربعة أوجه وهي F_1, F_2, F_3, F_4 ؛ لاحظ أن F_4 هو الوجه الخارجي أما بقية الاوجه فهي داخلية. كما أن تخم (أي حدود) الوجه F_2 هو دارة بسيطة، ولكن تخم الوجه F_1 ليس دارة.

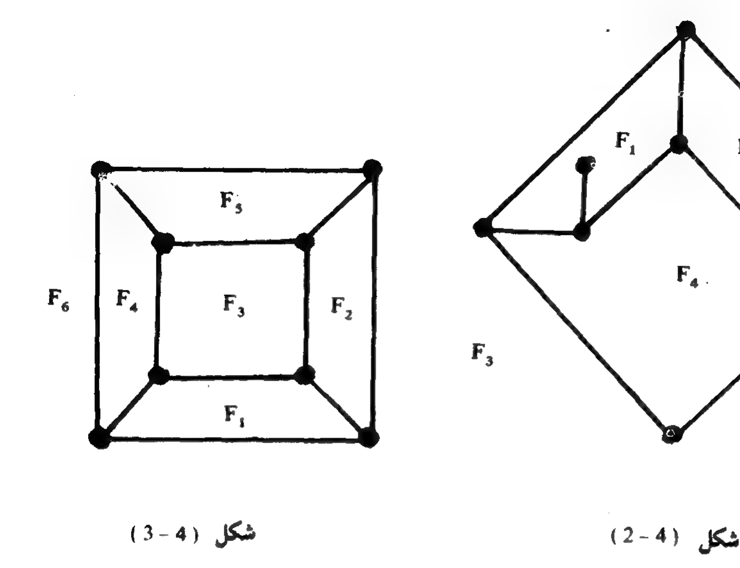


شكل (4 - 1)

من المهم أن نلاحظ عدم وجود شيء خاص بالوجه الخارجي ، حيث يمكننا أن

نجعل ، باعادة رسم البيان في المستوي، أي وجه نريده، مثل F ، وجهاً خارجياً. ويتم ذلك باسقاط البيان على سطح الكرة [انظر برهان المبرهنة (1 - 5)]، ثم نختار نقطة، مثل x، داخل المنطقة F ، وندوّر الكرة بحيث تصبح x نقطة الاسقاط (أي القطب الشمالي)، وعندئذ نسقط البيان المرسوم على الكرة الى المستوي المماس للكرة عند القطب الجنوبي. فمثلاً، يمكننا أن نعيد رسم البيان المعطى في الشكل (4 - 1) بحيث يصبح الوجه F_3 وجهاً خارجياً، كما هو مبين في الشكل (4 - 2)

لقد كان العالم المعروف أويلر (Euler) أول من درس البيانات المستوية عندما كان يبحث في متعددة السطوح (polyhedra) . فقد لاحظ أن لكل متعدد سطوح يوجد بيان مرافق له، رؤوسه هي رؤوس متعدد السطوح وحافاته هي اضلاعه. ويطلق على بيان متعدد السطوح هيكل 1 - sekeleton . فمثلاً، البيان في الشكل (4 - 3)



شكل (4 - 2)

شكل (4 - 3)

هو هيكل - ا للمكعب. ومن هنا جاء استعمال أويلر لكلمة وجه. ومن هذه الدراسة، أوجد أويلر سنة 1736 الصيغة المعروفة «بصيغة أويلر لمتعدد السطوح» وهي واحدة من النتائج الكلاسيكية في الرياضيات. ويمكن صياغة تلك القاعدة للبيانات المستوية المتصلة في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (4 - 1) صيغة أويلر- . لكل بيان مستوٍ متصل ، عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد اوجهة f ، يكون

$$n - m + f = 2. \qquad \dots (4 - 1)$$

البرهان: من الواضح أن الطرف ... من الصيغة (4 - 1) لايتغير إذا أجرينا إحدى العمليتين:

(أ) إزالة رأس احادي الدرجة مع الحافة الواقعة عليه؛

(ب) ازالة حافة مشتركة بين تخمي وجهين مختلفين.

ففي حالة وجود رأس أحادي الدرجة. فان ازالة ذلك الرأس مع الحافة الواقعة عليه تنقص كلاً من m ، n بواحد. وبذلك فان المقدار n - m + f لايتغير. كما أن ازالة حافة مشتركة بين تخمي وجهين مختلفين تنقص كلاً من m ، f بواحد. ولاتغير n . وفي هذه الحالة أيضاً n - m + f لايتغير.

فاذا بدأنا بأي بيان مستوٍ متصل وطبقنا عمليات من النوعين (أ) و(ب) فسوف نتوصل الى بيان G' يتكون من رأس واحد فقط وبدون حافات، وذلك لأن G بيان منته. عندئذ يكون هنالك وجه واحد فقط في G' وهو الوجه الخارجي. وعليه فان الصيغة (4 - 1) صحيحة للبيان G'. ولما كان الطرف الايسر من هذه الصيغة لايتغير عندما نجري عمليات من النوعين (أ) و(ب)، فان صيغة أويلر صحيحة للبيان G، وبذلك يتم البرهان.

هناك العديد من النتائج التي يمكن ان نستمدها مباشرة من صيغة أويلر.

نتيجة (4 - 1) : اذا كان G بيانا مستويا متصلاً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وتخم كل وجه من أوجهه هو دارة بسيطة طولها l، حيث ان $l \geqq 3$، فان

$$m = l(n-2)/(l-2). \qquad \dots(2-4)$$

لاحظ ان تخم الوجه الخارجي هو الدارة التي تحيط بالبيان المستوي من الخارج.

البرهان : بما ان تخم كل وجه في G هو دارة بسيطة طولها l وان كل حافة تشترك بين تخمي وجهين مختلفين، فان $2m$ يساوي مجموع أطوال تخوم كل اوجه G، أي ان

$$lf = 2m$$

وباستعمال صيغة اويلر نحصل على

$$n - m + (2m/l) = 2,$$

ومنها نحصل على (4 - 2). ■

يقال لبيان بسيط متصل مستوٍ انه أعظمي (maximal) اذا كانت عملية اضافة حافة بين رأسين غير متجاورين تحوله الى بيان غير مستوٍ. وبذلك، فان البيان المستوي يكون أعظميا اذا كان محتويا على أكبر عدد من الحافات، لنفس مجموعة الرؤوس. وبمعنى آخر، اذا كان G مستوياً أعظميا، فان تخم كل وجه فيه هو دارة بسيطة طولها 3. وعليه، بموجب النتيجة (4 - 1) نحصل على النتيجة التالية.

نتيجة (4 - 2) : اذا كان G بيانا مستويا أعظميا عدد رؤوسه n وعدد حافاته m. فان

$$m = 3(n-2).$$

من هذه النتيجة نحصل مباشرة على شرط ضروري للبيانات المستوية.

نتيجة (4 - 3) : اذا كان G بيانا متصلاً مستويا بسيطا عدد رؤوسه n وعدد حافاته m ، فان

$$m \leqq 3n - 6.$$

نتيجة (4 - 4) : البيانات K_5 و $K_{3,3}$ غير مستويين .

البرهان : في K_5 لدينا $m = 10, n = 5$ وعليه

$$m = 10 > 9 = 3n - 6.$$

ولذلك ، فان افتراض ان K_5 مستوياً سوف يناقض نتيجة (4 - 3) .
وهكذا ، فان K_5 غير مستوٍ .

في $K_{3,3}$ لدينا $m = 9, n = 6$ وطول كل دارة بسيطة لايقل عن 4 . فاذا كان $K_{3,3}$ مستويا ، فان $2m \geqq 4f$ ، وان $f = 5$ بموجب صيغة أويلر . ولكن هذا يؤدي الى $2(9) \geqq 4(5)$ ، وهو أمر مستحيل . لذلك ، فان $K_{3,3}$ غير مستوٍ . ■

ان للبيانين K_5 و $K_{3,3}$ أهمية كبيرة في دراسة البيانات المستوية كما سنرى ذلك في البند الآتي .

نتيجة (4 - 5) : كل بيان بسيط مستوٍ ، والذي عدد رؤوسه لايقل عن 4 ، يجب ان يحتوي على أربعة رؤوس على الأقل كل منهم بدرجة لاتزيد على 5 .

البرهان : يكفي أن نبرهن على ان كل بيان مستوٍ أعظمي ، G ، الذي عدد رؤوسه n لايقل عن 4 ، يحتوي على أربعة رؤوس على الاقل كل منهم بدرجة لاتزيد على 5 .

لنفرض ان عدد حافات G هو m . لما كان ρ ، مجموع درجات رؤوس G ، يساوي ضعف عدد الحافات m [بموجب المبرهنة (1 - 1)] ، وان

$$m = 3n - 6$$

بموجب النتيجة (4 - 2) ، فان

$$\rho = 2m = 6n - 12 = 6(n - 4) + 4(3).$$

وبما ان G أعظمي وان $n \geqq 4$ ، فان درجة كل رأس في G لاتقل عن 3 . وعليه ، فان هنالك على الاقل أربعة رؤوس بدرجة لا تزيد على 5 . ■

تمارين (4 - 1)

(1) أعد رسم البيان المعطى في الشكل (4- 3) بحيث يصبح F_3 الوجه الخارجي.

(2) برهن على أنه اذا كان G بيانا مستويا عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد أوجهه f وعدد مركباته k ، فان

$$n - m + f = k + 1 .$$

(3) اثبت النتيجة (4 - 3) .

(4) اثبت انه اذا كان G بيانا بسيطا مستويا خاليا من البرازخ والمثلثات . فان

$$m \leqq 2(n - 2),$$

حيث ان n عدد رؤوس G وان m عدد حافاته .

(5) ليكن G بيانا بسيطا متصلا مستويا تكعيبيا (أي درجة كل رأس فيه هي 3) عدد رؤوسه n . فاذا علمت أن عدد الاوجه التي طول تخم كل منها i هو ϕ_i . فاثبت ان

$$\sum_{i=3}^{l} (6 - i)\,\phi_i = 12,$$

حيث ان l هو عدد الحافات في أطول تخم للأوجه .

لاحظ ان البرزخ . ان وجد . يعتبر من ضمن تخم الوجه الذي يقع فيه ويحسب مرتين في طول ذلك التخم . [تلميح : استعمل المبرهنة (1 - 1) وصيغة أويلر] .

(*6) جد بيانا بسيطا متصلا مستويا عدد رؤوسه 8 بحيث ان البيان المتمم $\bar{G}$ يكون مستوياً . [تلميح : خذ G مستوياً أعظمياً] .

(7) يعرف خصر (girth) بيان G بأنه الطول لأقصر دارة في G . اذا كان G بيانا متصلا مستويا خصره g . حيث $g \geqq 2$. وعدد رؤوسه n . وعدد حافاته m . وبدون برازخ . فأثبت أن

$$m(g - 2) \leqq g(n - 2).$$

(*8) برهن على ان في كل بيان مستوٍ يوجد رأس v أو وجه F . واحد على الاقل . بحيث ان

$$\rho(v) \leqq 3 \quad , \quad \rho(F) \leqq 3.$$

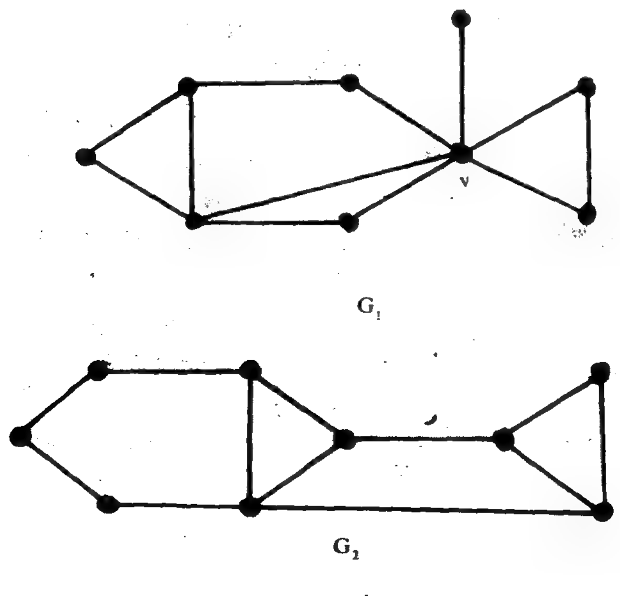
حيث ان $\rho(F)$ هو طول تخم الوجه F .

(4 - 2) مبرهنة كورَتوفسكي (Kuratowski's Theorem)

سوف نركز اهتمامنا في هذا البند على اثبات مبرهنة كورتوفسكي المشهورة والاساسية في تمييز البيانات المستوية عن غير المستوية . ولأجل ذلك نحتاج قبل كل شيء لبعض التعاريف والنتائج الأولية .

يُقال لرأس v في بيان متصل G انه رأس قاطع (cut - vertex) أونقطة مفصلية (articulation point) اذا كان البيان G - v . الناتج من G بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه غير متصل .

ويقال لبيان متصل انه قابل للانفصال (Separable) اذا احتوى على رأس قاطع . كما ويقال لبيان متصل انه غير قابل للانفصال (non - separable)) أوثنائي الاتصال (biconnected) اذا لم يحتوعلى رأس قاطع . فمثلاً . البيان G_1 في الشكل (4 - 4) هو بيان قابل للانفصال وان الرأس v هو رأس قاطع . أما البيان G_2 فهو غير قابل للانفصال .



شكل (4 - 4)

اذا كان v رأساً قاطعاً في بيان قابل للانفصال G وكانت C مركبة في $G - v$ ، فان البيان الجزئي الناتج من C باضافة الرأس v مع كل حافات G التي تصل رأساً في C مع الرأس v يطلق عليه قطعة (piece) البيان القابل للانفصال G نسبة للرأس القاطع v .

مبرهنة (4 - 2) : يكون الرأس v رأساً قاطعاً لبيان بسيط متصل G عدد رؤوسه n ، حيث $n \geqq 3$ ، اذا واذا فقط وجد في G رأسان u و w بحيث ان كل درب يصل u و w يمر بالرأس v .

البرهان : اذا كان v رأساً قاطعاً ، فان $G - v$ غير متصل . لتكن H_1 و H_2 مركبتين في $G - v$ ، وليكن u رأساً في H_1 ، و w رأساً في H_2 واضح ان كل درب بين u و w في G يمر بالرأس v .

من جهة اخرى ، افرض أن هنالك رأسين u و w في G بحيث ان كل درب بينهما يمر بالرأس v عندئذ ، لايوجد أي درب بين u و w في البيان $G - v$ وعليه ، فان $G - v$ غير متصل ، ولذلك فان v رأس قاطع . ∎

لاجل السهولة ، سوف نرمز للدرب الذي يصل بين الرأسين u و w بالرمز $P[u, w]$ واذا كان طول الدرب هو 1 ، فسنكتب $[u, w]$ وهو في الواقع الحافة $[u, w]$. واذا كان $P[u, w], P[w, v]$ دربين ، فان $P[u, w] + P[w, v]$ هو مسار من u الى v يتكون من متتابعة حافات الدرب $P[u, w]$ يليها متتابعة حافات $P[w, v]$. وهذا المسار ، يتضمن درباً بسيطاً بين u و v .

المبرهنة الآتية ضرورية لاثبات مبرهنة كورتوفسكي .

مبرهنة (4 - 3) : [مبرهنة منجر - ديراك (Menger - Dirac)] :

اذا كان $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ (+) درباً بسيطاً يصل بين رأسين مختلفين v_0 و v_k في بيان بسيط غير قابل للانفصال G عدد رؤوسه n حيث أن $n \geqq 3$. فانه يوجد في G دربان بسيطان P', P'' بين v_0 و v_k بحيث أن :

(+) لاحظ انه يمكن تمثيل الدروب والدارات بمتتابعات لرؤوسها في حالة كون البيان بسيطا

(1) لا توجد رؤوس مشتركة بين P' , P'' ماعدا الرأسين v_k و v_0 .
(2) اذا تتبعّنا كلاً من P' , P'' من v_0 الى v_k ، فان أدلة رؤوس P التي نصادفها تكون بترتيب متزايد .

✿ البرهان : لاثبات هذه المبرهنة نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على k .

عندما $k = 1$ ، فان $P = [v_0, v_1]$ ، وفي هذه الحالة يوجد درب بسيط P' بين v_0 و v_1 لايحتوي على الحافة $[v_0, v_1]$ ، لان هذه الحافة ليست برزخاً بسبب كون $\bar{G}$ غير قابل للانفصال وان عدد رؤوسه لايقل عن 3 . وعندئذ نأخذ $P'' = [v_0, v_1]$ ايضاً .

لنفرض الان أن المبرهنة صحيحة عندما يكون طول الدرب البسيط مساوياً لـ k ، ونثبت أنها صحيحة عندما يكون طوله $(k + 1)$ ، وبذلك نفرض أن الدرب البسيط

$$P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1})$$

هو بطول $(k + 1)$.

دعنا نرمز بـ Q' , Q'' للدربين البسيطين بين v_0 و v_k اللذين يحققان شروط المبرهنة بالنسبة للدرب البسيط $Q = P[v_0, v_k]$ ونثبت وجود دربين P' و P'' بين v_0 و v_{k+1} يحققان شرطي المبرهنة .

يجب أن يكون هنالك درب بسيط R بين v_0 و v_{k+1} لايمر بالرأس v_k لان غير ذلك يؤدي الى كون v_k رأسا قاطعاً بموجب المبرهنة (4 – 2) . آخذين بنظر الاعتبار أن v_0 رأس الابتداء للدرب R ، نفرض أن w هو آخر رأس من رؤوس R والذي يقع على المسار

$$Q + Q' + Q''$$

والآن لدينا أربع حالات مختلفة نستعرضها فيما يلي :

الحالة الاولى : $w = v_0$. عندئذ يكون الدربان البسيطان المطلوبان هما

$$P' = P \quad , \quad P'' = R \; .$$

الحالة الثانية : $w = v_{k+1}$. بما أن w ليس رأسا في Q . فان w في Q' أو Q'' ولـكنه ليس في كليهما . فاذا كان w في Q' . نأخذ

$$P' = Q'[v_0, w] \quad , \quad P'' = Q'' + [v_k, v_{k+1}] \, .$$

واذا كان w في Q'' . فاننا نأخذ

$$P' = Q' + [v_k, v_{k+1}] \quad , \quad P'' = Q''[v_0, w] \, .$$

الحالة الثالثة : الرأس w لاينتمي الى Q وأن $w \neq v_{k+1}$. في هذه الحالة يكون w اما في Q' أوفي Q'' . فاذا كان w في Q'' . نأخذ

$$P' = Q' + [v_k, v_{k+1}] \qquad P'' = Q''[v_0, w] + R[w, v_{k+1}] \, .$$

واذا كان w في Q' . نأخذ

$$P' = Q'[v_0, w] + R[w, v_{k+1}] \quad , \quad P'' = Q'' + [v_k, v_{k+1}] \, .$$

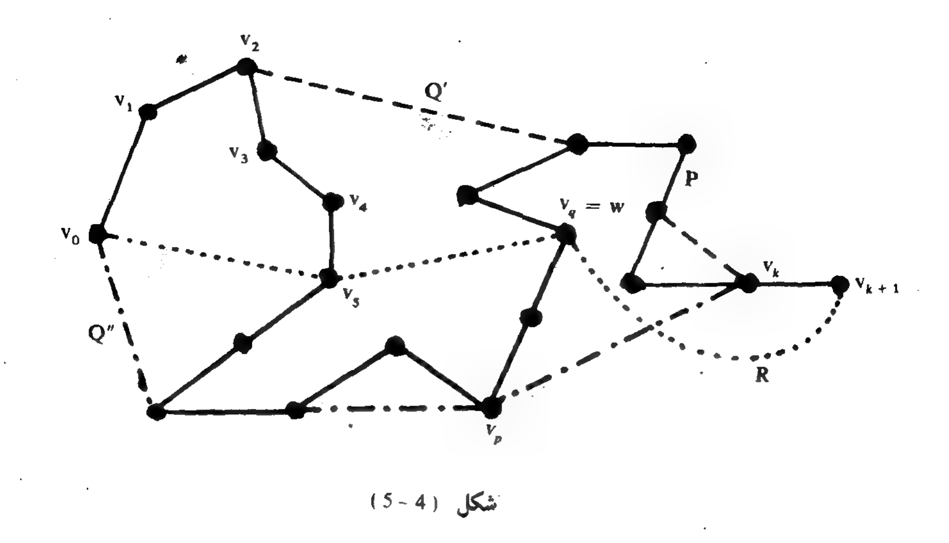
الحالة الرابعة : الرأس w ينتمي الى Q ولـكن $w \neq v_{k+1}$ ، $w \neq v_0$. في هذه الحالة يمكننا أن نكتب $w = v_q$ حيث $q < k$ ؛ ونفرض أن v_p هو آخر رأس (آخذين بنظر الاعتبار أن كافة هذه الدروب تبدأ من v_0) مشترك بين P ، $Q' + Q''$ والمحقق للمتباينة $p \leq q$. فاذا كان v_p في Q'' [انظر الشكل (4 – 5)] ، نأخذ

$$P' = Q' + [v_k, v_{k+1}], P'' = Q''[v_0, v_p] + Q[v_p, v_q] + R[v_q, v_{k+1}] \, .$$

واذا كان v_p في Q'، نأخذ

$$P' = Q'[v_0, v_p] + Q[v_p, v_q] + R[v_q, v_{k+1}] , \; P'' = Q'' + [v_k, v_{k+1}]$$

وبما أن هذه الحالات هي كل الحالات الممكنة ، فان المبرهنة صحيحة بالنسبة

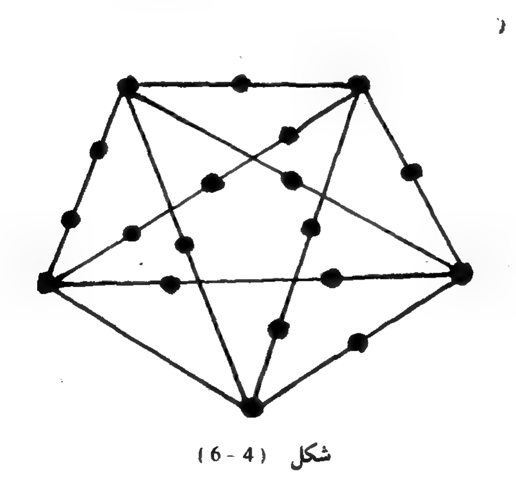


شكل (4 - 5)

للدرب P الذي طوله $(k + 1)$. وبذلك يتم البرهان . ∎

واضح ان كون بيان ما مستوياً أو غير مستوٍ لايتأثر لو قسمنا احد الحافات الى حافتين بادخال رأس جديد بدرجة 2 ، أو لو دمجنا حافتين بحافة واحدة بازالة رأس درجته 2. هذه الفكرة تقودنا الى التعريف الاتي :

يقال لبيانين G و G′ أنهما متكافئان توبولوجياً (homeomorphic) اذا أمكن تحويلهما الى بيانين متشاكلين بادخال رؤوس جديدة بدرجة 2 على بعض حافات أحدهما أو كليهما . فمثلاً ، البيان المعطى في الشكل (4 - 6) يكافيء توبولوجياً البيان التام K_5.



شكل (4 - 6)

نحن الآن مهيؤون لاثبات مبرهنة كوراتوفسكي.

مبرهنة(4 ـ 4) مبرهنة كوراتوفسكي (1930) – يكون البيان G مستوياً اذا واذا فقط لايحتوي G على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$.

البرهان :[+] واضح انه اذا كان G محتوياً على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$، فان G غيرمستوٍ، لان كلاً من K_5 و $K_{3,3}$ غيرمستوٍ بموجب النتيجة [(4 – 4)]، وأن البيان الذي يحتوي على بيان جزئي غير مستوٍ يكون غير مستوٍ.

البرهان بالاتجاه الآخر، أي اذا كان G غير مستوٍ، فانه يحتوي على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$، مطول وأكثر صعوبة، وسيكون بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الحافات. ويمكن أن نبرهن على العبارة المكافئة لذلك، أي: « اذا كان G لايحتوي على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 او $K_{3,3}$، فان G بيان مستوٍ».

واضح ان المبرهنة صحيحة فيما اذا كان G مكوناً من حافة واحدة أو حافتين، أو ثلاث حافات، وعليه نفرض أنها صحيحة لكل بيان عدد حافاته أقل من m، ونبرهن على أنها صحيحة لبيان عدد حافاته m. وهكذا نفرض أن G بيان عدد حافاته m ولايحتوي على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$. سوف نثبت أن افتراض G غير مستوٍ يؤدي الى تناقض.

واضح ان البيان G متصل، لانه اذا كان غير متصل ولايحتوي على رؤوس منعزلة، فان عدد الحافات في كل مركبة يكون اقل من m، وعندئذ تكون كل من مركباته مستوية، وهكذا يصبح G مستوياً كذلك، يجب ان يكون G غير قابل للانفصال والا اصبح مستوياً بموجب فرض الاستقراء الرياضي.

لتكن [u, w] حافة في G، وليكن G′ البيان الناتج من G بازالة الحافة [u, w]. البيان G′ مستوٍ، بموجب فرض الاستقراء الرياضي. الا ان ثبت ان البيان G′ يحوي دارة بسيطة تمر بالرأسين u و w بالطبع، هنالك حالتان ل G′ هنا: قابل للانفصال. أوغير قابل للانفصال.

(+) هذا البرهان هو تنقيح وتعديل بيرج (C. Berge) لبرهان كوراتوفسكي.

فاذا كان G' قابلاً للانفصال ، فانه يوجد رأس قاطع c بحيث ان كل درب بين u و w يمر بالرأس c ، سنبين ان هذا يؤدي الى تناقض .

اذا ازلنا c مع كل الحافات الواقعة عليه نحصل على مركبتين فقط ، وهذا يعني ان هنالك في G' قطعتين فقط C_u و C_w نسبة الى الرأس القاطع c ، حيث ان C_u هي القطعة التي تحتوي على الرأس u و C_w التي تحتوي على w . ليكن C'_u و C'_w بيانين ناتجين من C_u و C_w باضافة الحافتين $[u, c]$ و $[w, c]$ ، على الترتيب .لما كان G لايحتوي على بيان جزئي يكافيء توبولوجيا K_5 او $K_{3,3}$ فان ، كلاً من C'_u و C'_w لايحتوي ايضاً على مثل هذه البيانات الجزئية .وبما ان عدد حافات كل من C'_u و C'_w أقل من m ، فان كلاً منهما مستوٍ ، بموجب فرض الاستقراء الرياضي . وباستعمال اسقاط استيريوغرافي مناسب نستطيع ان نغمر كلاً من C'_u و C'_w في المستوي بحيث ان الحافتين $[u,c]$ و $[w, c]$ على الوجه الخارجي لهما ، على الترتيب .فاذا وصلنا الرأسين u و w بحافة $[u, w]$ واقعة في الوجه الخارجي ، نحصل على غمر للبيان G في المستوي ، وبذلك ، فان G مستوٍ ، وهو يناقض افتراضنا انه غير مستوٍ. وهكذا ، نستنتج انه لايمكن ان يكون G' قابلاً للانفصال ، اي يجب ان يكون G' غير قابل للانفصال .وعليه ، بموجب مبرهنة منجر – ديراك ، يوجد في G' دربان بسيطان بين u و w لايشتركان في أي راس غير النهايتين u و w ، اي ان هنالك دارة بسيطة في G' تحتوي على u و w .وسنثبت ان وجود هذه الدارة يؤدي الى تناقض لفرضنا ان G غير مستوٍ.

لتكن C دارة بسيطة تمر بالرأسين u و w في G' بحيث انها تضم في داخلها اكبر عدد من أوجه G المغمور في المستوي .دعنا نختر اتجاهاً كيفياً ، مثل الاتجاه المعاكس لحركة عقرب الساعة ، للدارة C بالطبع ، C تقسم المستوي الى جزئين ، الجزء الداخلي المحاط بـ C والجزء الواقع خارج C . حافات G' التي تقع في الجزء الداخلي تكون مع رؤوسها بياناً جزئياً يطلق عليه البيان الداخلي وحافات G' التي تقع في الجزء الخارجي تكون مع رؤوسها بياناً جزئياً يطلق عليه البيان الخارجي .سنطلق على كل مركبة للبيان الداخلي قطعة داخلية ، ونطلق على كل مركبة للبيان الخارجي قطعة خارجية ، نسبة للدارة C

نفرض ان G' مغمور في المستوي بشكل لايمكن معه تحويل أية قطعة خارجية الى البيان الداخلي دون احداث تقاطع بين بعض الحافات .

سنرمز للدرب البسيط من الرأس u الى الرأس w من الدارة C . باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة . بالرمز P [u . w] . بالطبع P [w. u] هو ذلك الجزء من C من الرأس w الى الرأس u باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة وبذلك $C = P[u.w] + P[w.u]$.

كل قطعة خارجيه لايمكن ان تشترك مع P [u . w] او P [w . u] بأكثر من رأس واحد . لان غير ذلك يؤدي الى تكوين دارة بسيطة تمر بالرأسين u و w وتحتوي على عدد اكبر من اوجه G' في داخلها .ولما كان G غير قابل للانفصال . فان كل قطعة خارجية تشترك برأس واحد فقط مع الدرب P (u , w) وبرأس واحد فقط مع الدرب P (w . u) .حيث ان P (u . w) هو الدرب الناتج من P [u.w] بحذف الرأسين u و w . وبالمثل نعرف P (w . u) .من جهة اخرى . فان هنالك على الاقل قطعة واحدة خارجية وقطعة واحدة داخلية . لان خلاف ذلك يجعل G مستوياً .لتكن . E قطعة خارجية . وليكن a الرأس المشترك بين E والدرب P (w . u) . و b الرأس المشترك بين E و P (u . w) .

من الواضح ان كل قطعة داخلية تشترك مع C برأسين على الاقل لكون G غير قابل للانفصال . كما ان هنالك على الاقل قطعة داخلية واحدة تشترك مع كل من P (u . w) و P (w . u) برأس واحد على الاقل . لان خلاف ذلك يجعل G مستوياً . اضافة الى ذلك . اذا كان لكل قطعة داخلية من هذا النوع جميع رؤوسها المشتركة مع C واقعة كلها على P (a . b) أوكلها واقعة على P (b . a) ، فانه يمكننا تحويل القطعة الخارجية E الى داخل C مما يناقض افتراضنا .

لذلك يوجد على الاقل قطعة داخلية واحدة . I . تشترك مع C برأسين . مثل c, d . متناوبين مع a, b . بترتيب . مثل a , c , b , d . باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة . وتشترك مع كل من الدربين P (u, w) . P (w . u) برأس واحد على الاقل .وعليه . يمكن تغطية كل حالات وقوع هذه الرؤوس على C بافتراض وجود أربعة رؤوس . مثل c, d.e,f . مشتركة بين C و I بحيث ان :

$c \varepsilon P(a, b)$, $d \varepsilon P(b, a)$, $e \varepsilon P(u, w)$, $f \varepsilon P(w, u)$,

حيث ان الرمز ε يعني « ينتمي الى » واضح انه لايمكن ان يكون $c = d$, $e = f$
ولكن يمكن ان يكون لدينا $c = e$ ، $c = f$ ،... الخ .وهكذا ستأمل فيما يلي
كلاً من هذه الحالات .

(1) اذا كان احد الرأسين c و d على الدرب $P(u,w)$ والآخر على الدرب $P(w, u)$. وليكن

$$c \varepsilon P(w,u) \quad , \quad d \varepsilon P(u,w) ,$$

فعندئذنأخذ $c = f$ و $d = e$. هذه الحالة تؤدي الى وجود بيان جزئي في G يكافيء
توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4 - 7 - أ)] . وهذا يناقض الفرض .

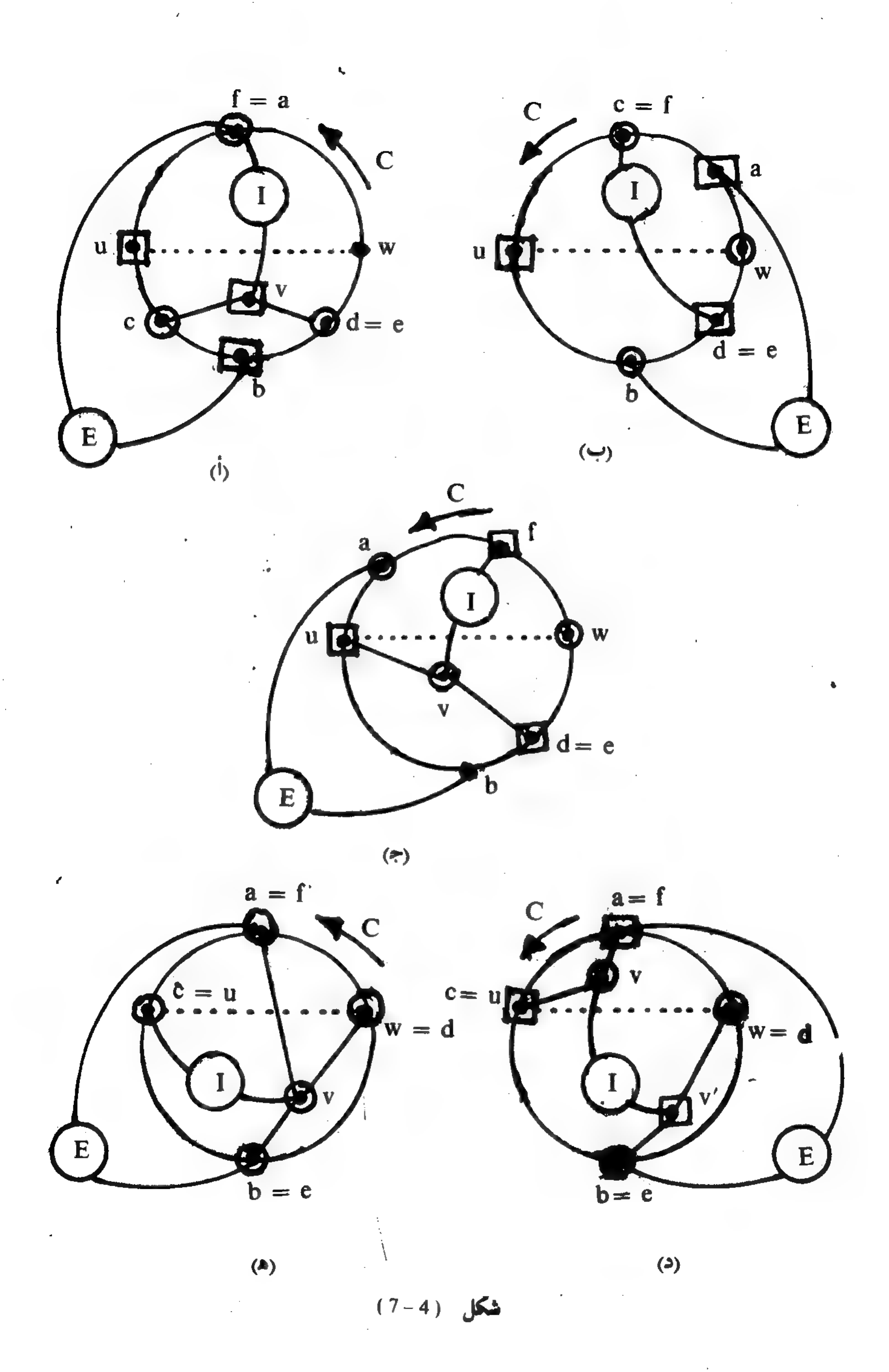
(2) اذا كان كل من c و d على $P(u,w)$. فعندئذ يمكننا ان نفرض
$f = a$. لانه اذا كان $f \neq a$ نحصل على الحالة (1) لـكون $f \varepsilon P(w,u)$.
لـكن اذا كان $f = a$. فاننا نجد أيضاً ان هنالك في G بياناً جزئياً يكافيء
توبولوجياً $K_{3,3}$[انظر الشكل (4 - 7 - ب)] . لنفس السبب، يمكننا التخلص من الحالة
التي فيها c و d واقعين على الدرب $P(w,u)$.

(3) اذا كان $c = u$ و $d \neq w$. مثلاً $d \varepsilon P(u,w)$. فاننا نحصل على
بيان جزئي يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4 - 7 - جـ)]. وهذه الحالة
تناقض الفرض أيضاً .ولنفس السبب نتخلص من الحالة التي فيها $d = w, c \neq u$.

(4) اذا كان $c = u$ و $d = w$. فيمكننا ان نفرض $e = b$ و $f = a$. لانه اذا لم
يكن كذلك فسيكون لدينا اما الحالة (1) او الحالة (3) . وهنا لدينا حالتان .

(أ) اذا كان أحد الدروب التي تصل الرأسين a و b يشترك مع أحد الدروب
التي تصل الرأسين c و d بأكثر من رأس واحد في I ، فعند ذلك يكون في
G بيان جزئي يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ [انظر الشكل (4 - 7 - د)] .

(ب) اذا كانت كل الدروب التي تصل الرأسين a و b تشترك برأس واحد
فقط مع كل الدروب التي تصل الرأسين c و d ، في I ، فعند ذلك يكون في
G بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 [انظر الشكل (4 - 7 - هـ)] .


f = a
C
I
u
w
v
c
d= e
b
E
(أ)
C
c = f
a
I
u
w
d = e
b
E
(ب)
C
a
f
I
u
w
v
d= e
b
E
(ج)
a = f
C
c = u
w = d
I
v
E
b = e
(ه)
C
a= f
c= u
v
w= d
I
v′
E
b= e
(د)

شكل (7-4)

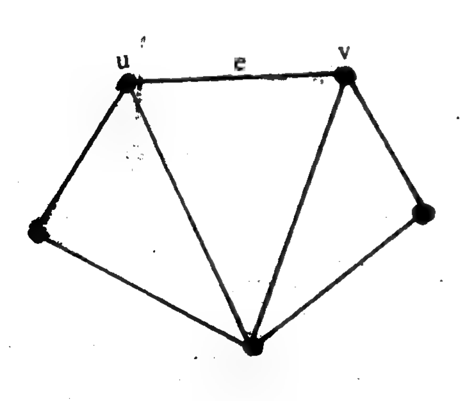
لقد ناقشنا فيما تقدم كل الحالات لمواقع الرأسين c و d . وفي كل تلك الحالات وجدنا بياناً جزئياً في G يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ او K_5 . وهو ما يناقض فرضنا .وبهذا يتم البرهان . ∎

ملاحظة : في الشكل (4 – 7) : لاحظ ان الرؤوس المحاطة بدوائر او مربعات صغيرة هي الرؤوس الرئيسية (اي التي بدرجة 3 او اكثر) للبيان الجزئي الذي يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ او K_5 .

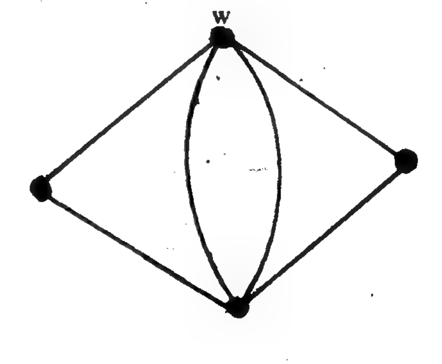
هنالك العديد من المبرهنات التي تعطي شروطاً ضرورية وكافية لكي يكون بيان مامستوياً . وسوف نثبت أحدهما فيما يلي ونستعرض بعضاً منها في أماكن اخرى من هذا الفصل .

هنا نحتاج الى تعريف مفهوم الانكماش (the contraction) . إنكماش حافة في بيان G هو عملية ازالة الحافة $e = [u,v]$ ، من G ثم تطابق رأسيها ، u و v ، بحيث ان الرأس الناتج ، w ، يقع على كل الحافات التي كانت واقعة على u أو v ماعدا الحافة e [انظر الشكل (4 – 8)] . يقال ان G قابل للانكماش (contractible) الى G′ (أو G′ هومنكمش G)

اذا امكن الحصول على G′ من G باجراء انكماشات متعاقبة لبعض حافات G



G



G′

شكل (4 - 8)

مبرهنة (4 – 5) : يكون البيان G مستوياً اذا واذا فقط G لايحتوي على بيان جزئي قابل للانكماش الى K_5 أو $K_{3,3}$.

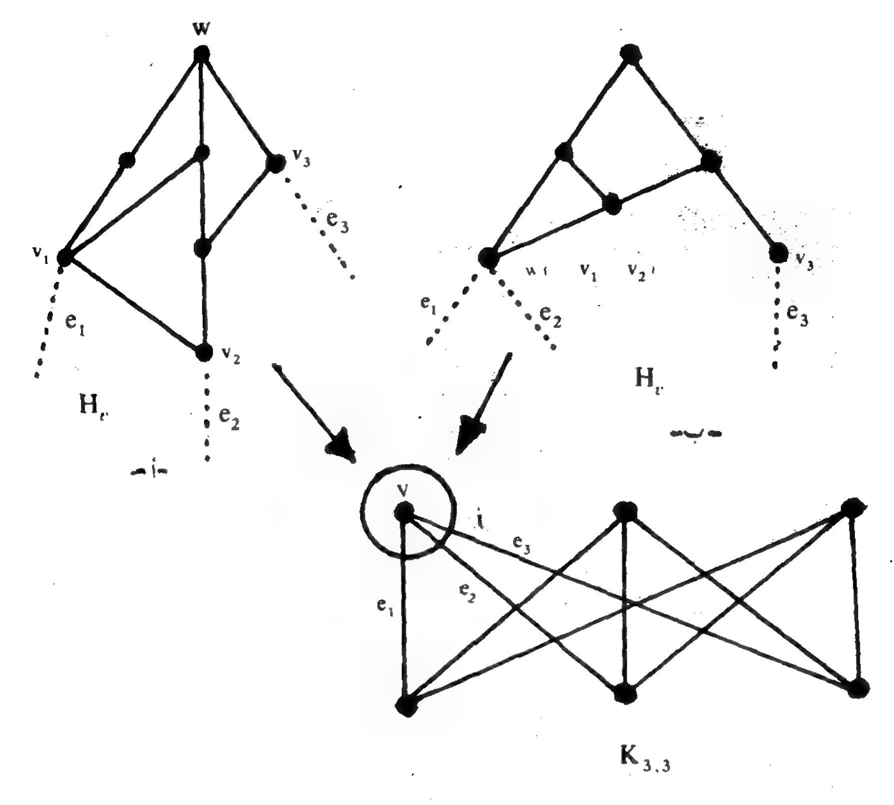
البرهان : اذا كان G غير مستو ، فانه يحتوي على بيان جزئي ، H ، يكافيء توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$ ، بموجب مبرهنة كوروتوفسكي . وبانكماش بعض حافات H التي تقع على الرؤوس بدرجة 2 ، نجد مباشرة أن H قابل للانكماش الى K_5 أو $K_{3,3}$

من جهة أخرى ، نفرض أن G يحتوي على بيان جزئي ، H ، قابل للانكماش الى $K_{3,3}$ ونبرهن على أن G غير مستوٍ . ليكن v رأساً في $K_{3,3}$ ناجماً عن انكماش البيان الجزئي H_r الى H [انظر الشكل (4 – 9)].

يقع الرأس v على ثلاث حافات e_1, e_2, e_3 في $K_{3,3}$. وهذا يعني انه عندما نعتبر هذه الحافات حافات في H فانها تقع بالترتيب على ثلاثة رؤوس v_1, v_2, v_3 (قد لاتكون مختلفة) في H_r . اذا كانت الرؤوس v_1, v_2, v_3 مختلفة ، فانه يمكن إيجاد رأس w في H_r مع ثلاثة دروب من w الى هذه الرؤوس وهي لاتشترك في اي رأس غير w [إنظر شكل (4 – 9 – أ)] . أما اذا كانت بعض الرؤوس v_1, v_2, v_3 غير مختلفة ، قُل مثلاً $v_1 = v_2 \neq v_3$ ،

فعندئذ نأخذ $w = v_1 = v_2$. ويكون هنالك درب من w الى v_3 في H_r وهكذا . يمكننا ان نضع الرأس w مع الدرب او الدروب الخارجة منه بدلاً عن H_r . اذا استمرينا بهذا التركيب لكل الرؤوس الأخرى في $K_{3,3}$ ، ثم وصلنا الدروب الناتجة بالحافات المقابلة لها في $K_{3,3}$ ، ينتج بيان جزئي من H يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$. وعليه ، فان G غير مستو بموجب مبرهنة كورتوفسكي

بمناقشة مماثلة يمكننا ان نثبت انه اذا احتوى G على بيان جزئي H قابل للانكماش الى K_5 ، فان G غير مستوٍ . وقد ترك البرهان كتمرين للطالب[التمرين (7) من مجموعة تمارين (4 – 2)] . ■



شكل (4 9)

تمارين (4 - 2)

(1) برهن على أن البيان غير القابل للانفصال . G . يكون مستوياً اذا واذا فقط كل قطعة منه بالنسبة لرأس قاطع v هي مستوية .
[تلميح : إثبت أولا انه يمكن غمر G في المستوى بحيث أن v واقع على الوجه الخارجي .]

(2) إستعمل مبرهنة كورتوفسكي لاثبات ان بيان بيترسن غير مستوٍ .

(3) إثبت أن التكافؤ التوبولوجي هو علاقة تكافؤية .

(4) اذا كان G_1 و G_2 بيانين متكافئين توبولوجياً . وكان عدد رؤوسهما n_1 و n_2 . وعدد حافاتهما m_1 و m_2 . على الترتيب. فاثبت أن $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$

(5) اثبت أن كلاً من $I(K_{3,3})$ و $I(K_5)$ غير مستوٍ. [تلميح : اثبت ان $I(K_{3,3})$ ، $I(K_5)$ يحتوي على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$. K_5 . على الترتيب .]

(*6) ليكن G بياناً بسيطاً . اذا كان G غير مستوٍ ، فاثبت أن I (G) غير مستوٍ أيضاً . اذا كان G مستوياً ، فهل من الضروري أن يكون I (G) مستوياً ؟

(*7) إثبت انه اذا احتوى بيان G على بيان جزئي قابل للانكماش الى K_5 ، فان G بيان غير مستوٍ .

(8) هل البيان الاول قابل للانكماش الى البيان الثاني في كل من الفروع الآتية ؟بين ذلك .

(a) K_6 , K_5 . (b) $K_{3,3}$, K_4 .

(c) W_6 , K_4 . (d) K_5 . بيان بيترسن

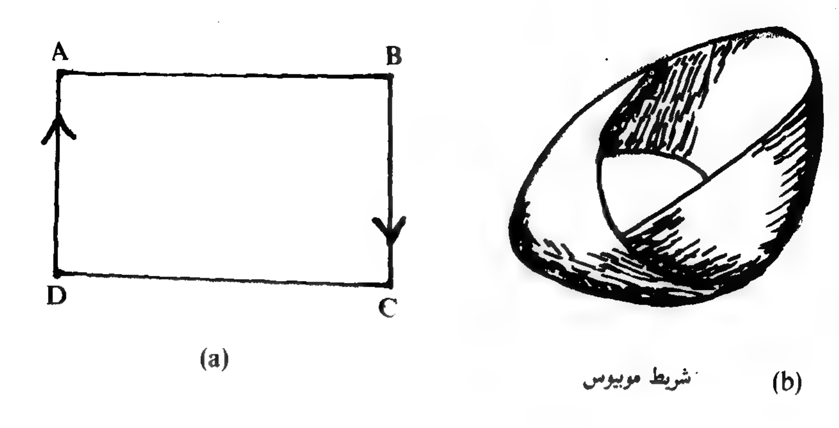
(e) W_6 . بيان بيترسن

(4 3) السطوح المغلقة الموجهة (Oriented Closed Surfaces) في R^3

لكي يفهم القاريء موضوعي الجنس وغمر البيانات في السطوح الموجهة . يحتاج الى معرفة المقصود بالسطوح المغلقة الموجهة . لذلك ، نعرض في هذا البند ، بشكل صوري ، نبذة مختصرة لبعض المفاهيم المتعلقة بالسطوح . التعاريف الرياضية الدقيقة لهذه المفاهيم تتطلب معرفة بعض المفاهيم التوبولوجية .

السطح الكروي هو سطح مغلق . وكذلك سطح الطرة . اما المستوي فهو سطح مفتوح وكذلك شريط موبيَس (Mobius strip) المبين في (b) من الشكل (4 - 10) . لاحظ أنه يمكن تكوين شريط موبيَس من تطابق ضلعين متقابلين لمستطيل (من الورق مثلاً) بحيث يتطابق السهمان بعضهما على بعض [انظر (a) من الشكل (4 - 10)] - أي تنطبق النقطة A على النقطة C . وتنطبق النقطة D على B .

يعرف السطح المغلق توبولوجياً على انه متنوعة - 2 متراصة (compact 2 - manifold)

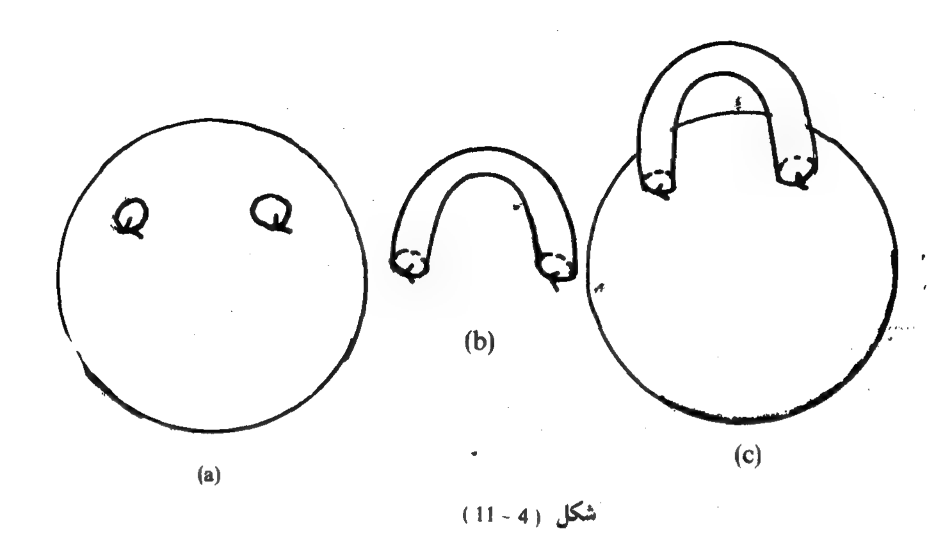


شكل (4 - 10)

ليكن S سطحاً . ولنفرض اننا رسمنا حول كل نقطة على S (ماعدا النقاط الواقعة على تخمه . إن وجدت) منحنياً بسيطاً مغلقاً صغيراً وعيّنا له اتجاهاً محدداً (اما باتجاه حركة عقرب الساعة او بالاتجاه المعاكس) . عندئذ . يقال ان S موجه أوقابل للتوجيه (orientable) اذا امكن اختيار الاتجاهات لهذه المنحنيات المغلقة بحيث ان لكل النقاط على S القريبة قرباً كافياً عن بعضها يكون لمنحنياتها نفس الاتجاه . فمثلاً . السطح الكروي هو سطح موجه . وكذلك الطرة . اما شريط موبيس فهوسطح غير موجه .

مما تقدم نستنتج ان الكرة والطرة سطحان موجهان مغلقان .

والان نبين بطريقة صورية كيفية الحصول على سطوح مغلقة موجهة اخرى . وذلك بربط مقابض (handles) بالسطح الكروي. نأخذ على سطح الكرة قرصين دائريين مغلقين منفصلين ونعين لتخميهما نفس الاتجاه (مثلاً . باتجاه حركة عقرب الساعة) . ومن ثم نرفع مابداخلهما فيتكون لدينا ثقبان على السطح الكروي لهما تخمان موجهان بنفس الاتجاه . كما هو مبين في (a) من الشكل (4 11) . بعد ذلك نأخذ اسطوانة منحنية [كالتي في (b) من الشكل (4 11)] ونثبت على طرفيها الاتجاه نفسه الذي عين لتخمي الثقبين . واخيراً . نربط طرفي الاسطوانة بالثقبين الموجودين على سطح الكرة بحيث ينطبق طرفي الاسطوانة على تخمي الثقبين مع المحافظة على الاتجاه نفسه . كما هو مبين في (c) من الشكل (4 11) السطح الناتج هذا هوسطح كرة مع مقبض واحد . وهويكافيء توبولوجياً سطح الطرة .



شكل (4 - 11)

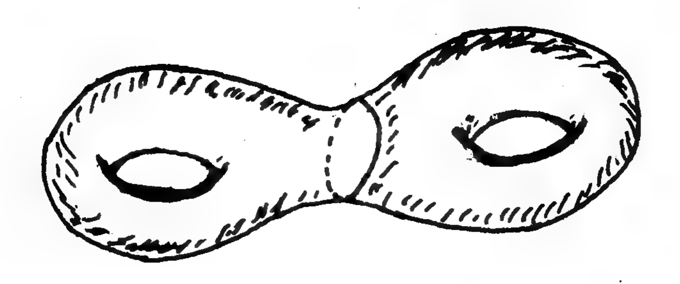
يمكن اعادة هذه العملية على السطح الناتج وذلك بربط مقبض ثانٍ به . فيتكون لدينا سطح كروي مربوط به مقبضان . وهكذا ، بتكرار هذه العملية h من المرات نحصل على كرة مربوط بها $\bar{h}$ من المقابض .

ندوّن الآن المبرهنة الآتية بدون ذكر برهانها .

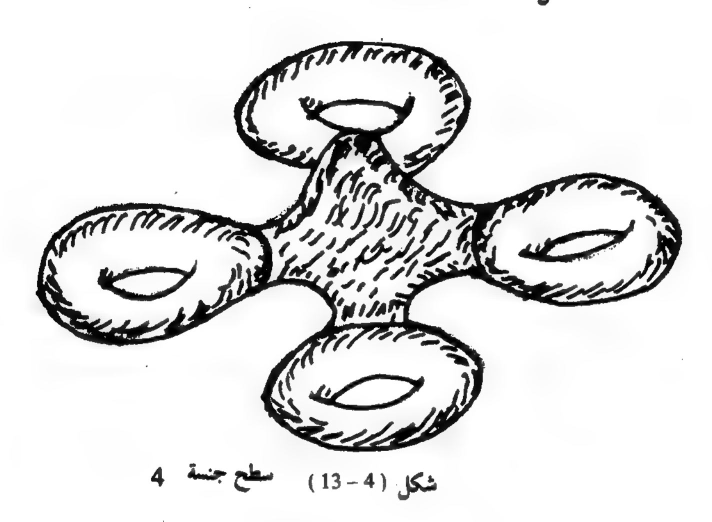
مبرهنة : « كل سطح مغلق موجه يمكن الحصول عليه من السطح الكروي بربط عدد معين من المقابض بالطريقة التي ذكرت فيما تقدم . »

يعرف جنس (genus) السطح المغلق الموجه S بانه عدد المقابض التي تربط بسطح كروي للحصول على S . فمثلاً ، السطح الكروي هو سطح جنسه صفر، والطرة هي سطح جنسه 1 ، والطرة المزدوجة (double torus) المبينة في الشكل (4 – 12) هي سطح جنسه 2 ، والسطح المبين في الشكل (4 – 13) هو سطح موجه جنسه 4

نكتفي بهذا القدر من الشرح على السطوح المغلقة الموجهة ، ويمكن للقاريء الراغب في المزيد قراءة بعض كتب موضوع التوبولوجيا .



شكل (4 – 12) طرة مزدوجة



شكل (4 – 13) سطح جنسة 4

*(4 – 4) الجنس والسمك وعدد التقاطع

نشـرح فـي هـذا البند ثلاثة لامتغيرات بيانية لبيان G ، وهي الجنس (the genus) والسمك (the thinckness) وعدد التقاطع (crossing number) . الكثير من القضايا والمسائل في هذه المواضيع غير محلولة لحد الآن ، والمحلول منها هو لبيانات خاصة مثل البيانات التامة والثنائية التجزئة التامة والتكعيبية . كما أن معظم النتائج المعروفة لها براهين مطولة ومتعددة الحالات . وعليه ، سوف لانعطي براهين بعض تلك النتائج ونكتفي بذكر نصها اتماماً للفائدة .

سوف نقسم هذا البند الى ثلاث بنود جزئية وفقاً للمواضيع الثلاثة التي يتكون منها .

(4 - 4 - 1) الجنس

لقد لاحظنا في الفصل الاول انه يمكن غمر اي بيان في الفضاء الاقليدي الثلاثي الابعاد ، R^3 ، وان كل بيان مستوٍ يمكن غمره في سطح كروي . ولقد لاحظ كونيك (Konig) أن كل بيان يمكن غمره في سطح قابل للتوجيه . ويمكن اثبات صحة ذلك بسهولة . فاذا كان G بياناً مرسوماً على سطح كروي . وكان هنالك تقاطع بين حافتين e_1 و e_2 . فعندئذ يمكننا ربط مقبض بالسطح الكروي . ورسم e_1 على سطح المقبض وابقاء e_2 مرسوماً على السطح الكروي ماراً تحت المقبض . وهكذا يمكن ربط السطح الكروي بمقابض لايزيد عددها على عدد التقاطعات بين الحافات . وهكذا يمكن غمر G في سطح مغلق موجه جنسه h لايزيد على عدد التقاطعات بين الحافات .

ولقد ذكرنا في البند (1 7) غمر بعض البيانات غير المستوية . مثل $K_{4.4}$ ، $K_5 , K_6 , K_7 , K_{3.3}$. في سطح الطرة . يطلق عادة على كل بيان يمكن غمره في سطح طرة بياناً طرياً (toroidal graph) . وهكذا . فان البيانات $K_5 , K_6 , K_7 , K_{3.3} , K_{4.4}$ هي بيانات طرية .

من الطبيعي ان نسأل عن أقل عدد h بحيث يمكن غمر البيان في سطح موجه جنسه h . ولاجل ذلك نعرف جنس البيان G على النحو الآتي : اذا امكن غمر البيان G في سطح موجه جنسه g ولايمكن غمره في سطح جنسه $g - 1$. فيقال ان جنس البيان G هو g . واضح انه اذا امكن غمر البيان في سطح جنسه g .. فيمكن غمره ايضاً في سطح جنسه $g + k$ ، $1 \leq k$ اما العكس فغير صحيح .

يرمز لجنس البيان G بالرمز $g(G)$. واضح أن $g(G) = 0$ اذا واذا فقط G بيان مستوٍ . كما ان البيانات المتكافئة توبولوجياً لها نفس الجنس . وان جنس اي بيان لايزيد على عدد التقاطع [انظر التمرين (4) من مجموعة التمارين (1 6)] .

يمكن تعميم صيغة أويلر لبيانات ذات جنس g . كما هو مبين في المبرهنة الآتية التي تعود الى أويلر . والتي نذكرها بدون برهان .

مبرهنة (4 – 6) : اذا كان G بياناً متصلاً جنسه g . وعدد رؤوسه n وعدد حافاته m وعدد أوجهه (عندما يغمر في سطح موجه جنسه g) f ، فان

$$n - m + f = 2(1 - g) \qquad \ldots(3\text{–}4)$$

[يمكن الاطلاع على البرهان في المصدر (13)]

من المبرهنة (4 – 6) نستنتج العديد من النتائج المباشرة .

نتيجة (4 – 6) : ليكن G بياناً متصلاً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m وجنسه g . عندئذ :

(أ) اذا كان كل وجه في G مثلثاً ، فان

$$m = 3(n - 2 + 2g) \cdot$$

(ب) اذا كان كل وجه في G شكلاً رباعياً ، فان

$$m = 2(n - 2 + 2g) \cdot$$

البرهان :

(أ) بما ان كل وجه (عندما يغمر G في سطح جنسه g) هو مثلث ، فان $3f = 2m$ وبالتعويض في الصيغة (4 3) ، نحصل على العلاقة المطلوبة .

وبالمثل ، يمكن اثبات الفرع (ب) وقد ترك تمريناً للطالب .■

نتيجة (4 – 7) : اذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً عدد رؤوسه n وعدد حافاته m ، فان

$$g(G) \geqq \frac{1}{6} m - \frac{1}{2} n + 1 .$$

واذا لم يحتو G على مثلثات ، فان

$$g(G) \geqq \frac{1}{4} m - \frac{1}{2} n + 1 .$$

البرهان مباشر ويترك تمريناً للطالب .

ان ماهو معلوم من جنس بيان كيفي قليل جداً . ولكن هنالك صيغ تعطينا الجنس لبيانات خاصة ، مثل $K_n, K_{m,n}, Q_n$. والطريقة المتبعة لايجاد تلك الصيغ هي استعمال النتيجة (4 – 7) للحصول على قيد أدنى ، ثم محاولة اثبات وجود سطح

جنسه يساوي ذلك القيد الادنى ويمكن غمر البيان الخاص فيه . ويتم ايجاد ذلك السطح بطريقة تركيبية . ولهذا ، فان طريقة اثبات أن القيد الادنى هو أيضا قيد أعلى مطولة جداً ومتعددة الحالات .

اذا كان x أي عدد حقيقي . فاننا نعرف $[x]$ بأنه اكبر عدد صحيح لايزيد على x . فمثلاً $[4] = 4 . [7/2] = 3 . [-4/3] = -2$.كما نعرف $\{x\}$ بانه أصغر عدد صحيح لايقل عن x. فمثلاً

$$\{5\} = 5 . \{10/3\} = 4 . \{-4/3\} = -1 .$$

يمكن ان نثبت بسهولة انه اذا كان x و y عددين صحيحين موجبين . فان

$$\{x/y\} = [(x+y-1)/y] \quad \ldots\ldots (4-4)$$

مبرهنة (7 - 4) : لكل عدد صحيح موجب n . $n \geqq 3$. لدينا

$$g(K_n) = \left\{ \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\}$$

باستعمال النتيجة (4 - 7). نستنتج مباشرة أن

$$g(K_n) \geqq \left\{ \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\}$$

وفي سنة 1890 . تكهن العالم هيوود (Heawood) أن العدد

$$\left\{ \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \right\}$$

هو أيضاً قيد أعلى لـ $g(K_n)$ ولكنه لم يتمكن من اثبات ذلك . وفي سنة 1968 . أثبت العالمان رنكل (Ringel) ويونكس (Youngs) صحة تكهن هيوود . ولما كان البرهان مطولاً فلا نذكره هنا . ويمكن للراغب الاطلاع عليه في المصدر [5].

بالنسبة لجنس البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m.n}$. فقد أثبت رنكل (سنة 1965) المبرهنة الآتية :

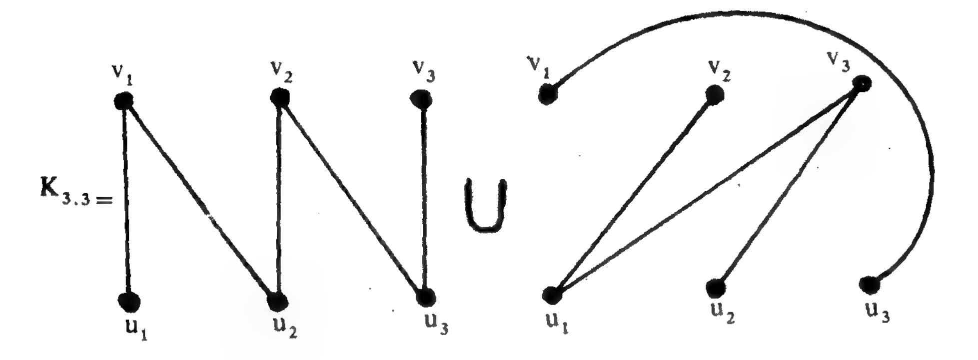
مبرهنة (4 8) : لكل بيان ثنائي التجزئة التام $K_{m.n}$. $m . n \geqq 2$. لدينا

$$g(K_{m.n}) = \left\{ \frac{1}{4}(m-2)(n-2) \right\}.$$

لن نذكر برهان هذه المبرهنة هنا لكونه مطولاً جداً .

(4 - 4 - 2) السمك :

يعرف سمك بيان G بانه العدد الاصغر من البيانات الجزئية المستوية التي اتحادها هو G . ويرمز عادة لسمك البيان G بالرمز $\theta(G)$. واضح أن G مستوٍ اذا واذا فقط $\theta(G) = 1$. كما أن $\theta(K_5) = 2$ و $\theta(K_{3,3}) = 2$ [انظر الشكل (4 - 14)].



شكل (4 - 14)

بما ان عدد حافات البيان المستوي الاعظمي الذي عدد رؤوسه n هو (3n - 6) فان لكل بيان G .

$$\theta(G) \geq \frac{m}{3n-6} . \qquad \ldots (4 - 5)$$

حيث ان n عدد رؤوس G و m عدد حافاته .وما دام θ عددا صحيحاً موجبا . فان

$$\theta(G) \geq \left\{ \frac{m}{3n-6} \right\} . \qquad \ldots (4 - 6)$$

وباستعمال العلاقة (4 - 4) نحصل من (4 - 6) على

$$\theta(G) \geq \left[\frac{m + 3n - 7}{3n - 6} \right] \qquad \ldots (4 - 7)$$

هذه الصيغة تعطينا القيد الادنى لسمك اي بيان . ومما يدهشنا ان هذا القيد الادنى هو ايضا القيمة المضبوطة لسمك بعض البيانات الخاصة كما هو مبين فيما يلي .

بما ان عدد حافات K_n هو $n(n-1)/2$ ، فانه بموجب العلاقة (4 − 7)، يكون لدينا :

$$\theta(K_n) \geqq \left[\frac{n(n-1)+6n-14}{6n-12}\right] = \left[\frac{n+7}{6}\right]. \quad ...(4-8)$$

مبرهنة (4 − 9) : اذا كان

$$n \not\equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 6),\ n \neq 9$$

فان

$$\theta(K_n) = \left[\frac{n+7}{6}\right]. \quad ...(4-9)$$

عندما $n \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\ 6)$ ، الصيغة (4 − 9) قد تصح اولاتصح .

كما وجدنا في العلاقة (4 − 8)، فان $[(n+7)/6]$ هو قيد ادنى لسمك K_n ، ولكن البرهان على ان هذا العدد هو نفسه قيد اعلى مطول ومعقد ،ولذلك فقد فضلنا عدم ذكره هنا .

اما سمك البيان $K_{m,n}$ فقد دُرس من قبل العلماء Moon و Harary و Beineke في السنوات 1957 − 1964. وتلخص نتائجهم في المبرهنة التاليــة .

مبرهنة (4 − 10) :

$$\theta(K_{m,n}) = \left\{\frac{mn}{2(m+n-2)}\right\},$$

عدا عندما $m < n$ و mn فردي ، ويوجد عدد صحيح k بحيث إن

$$n = [2k(m-2)/m-2k)].$$

يترك البرهان لصعوبته.

نتيجة (4 − 8) :

$$\theta(K_{n,n}) = [(n+5)/4].$$

البرهان : بموجب المبرهنة (4−10) ، .

$$\theta(K_{n,n}) = \left\{\frac{n^2}{4(n-1)}\right\}$$

$$= \left[\frac{n^2 + 4n - 5}{4(n-1)} \right], \qquad \text{(4 -4)} \text{ بموجب}$$

$$= [(n+5)/4].$$

(4-4-3) عدد التقاطع :

سبق أن عرفنا في الفصل الاول عدد التقاطع ، $\nu(G)$ ، لأي بيان G ، على أنه أصغر عدد ممكن لتقاطعات حافاته عندما يرسم G في المستوي ، علماً بانه لايسمح بتقاطع اكثر من حافتين في نقطة واحدة.

القيمة المضبوطة لـ $\nu(G)$ غير معروفة حتى لبعض البيانات الخاصة ، ولكن هنالك قيود عليا لبعض منها ، ويعتقد بعض الباحثين انها القيم المضبوطة . وسوف نشرح عدد التقاطع لكل من K_n و $K_{m,n}$.

مبرهنة (4-11) : لكل n ، $n \geqq 4$ ، لدينا

$$\nu(K_n) \leqq \begin{cases} n(n-2)^2(n-4)/48, & \text{عندما n زوجي} \\ (n-1)(n-3)(n^2-4n+1)/48, & \text{عندما n فردي} \end{cases}$$

البرهان : نأخذ قطعة مستقيم ، L ، في المستوي ، ونقسم L الى (n-1) من الاجزاء المتساوية بالنقاط $v_1, v_2, \ldots, v_n$ والتي ستمثل رؤوس البيان K_n . نصل v_1 بكل من $v_3, v_4, \ldots, v_n$ بنصف دائرة مرسومة الى الاعلى من L ، ونصل v_2 بكل من $v_4, v_5, \ldots, v_n$ بنصف دائرة مرسومة الى الاسفل من L. وبصورة عامة ، نصل v_i بكل من $v_{i+2}, v_{i+3}, \ldots, v_n$ بقوس نصف دائرة مرسوماً الى الاعلى (الاسفل) من L اذا كان i فردياً (زوجياً) لكل $i = 1,2,\ldots, n-2$ ، كماهو موضح في الشكل (4-15)

يمكن أن نلاحظ من الشكل (4-15) أنه في حالة كون n زوجياً يكون عدد نقاط التقاطعات بين أنصاف الدوائر هو

$$[(n-4)+(n-5)+\ldots+2+1]+[(n-5)+(n-6)+\ldots+2+1]$$

$$+2\,[(n-6)+(n-7)+\ldots+2+1]+2[(n-7)+(n-8)+\ldots+2+1]$$

$$+3\,[(n-8)+(n-9)+\ldots+2+1]+3[(n-9)+(n-10)+\ldots+2+1]$$

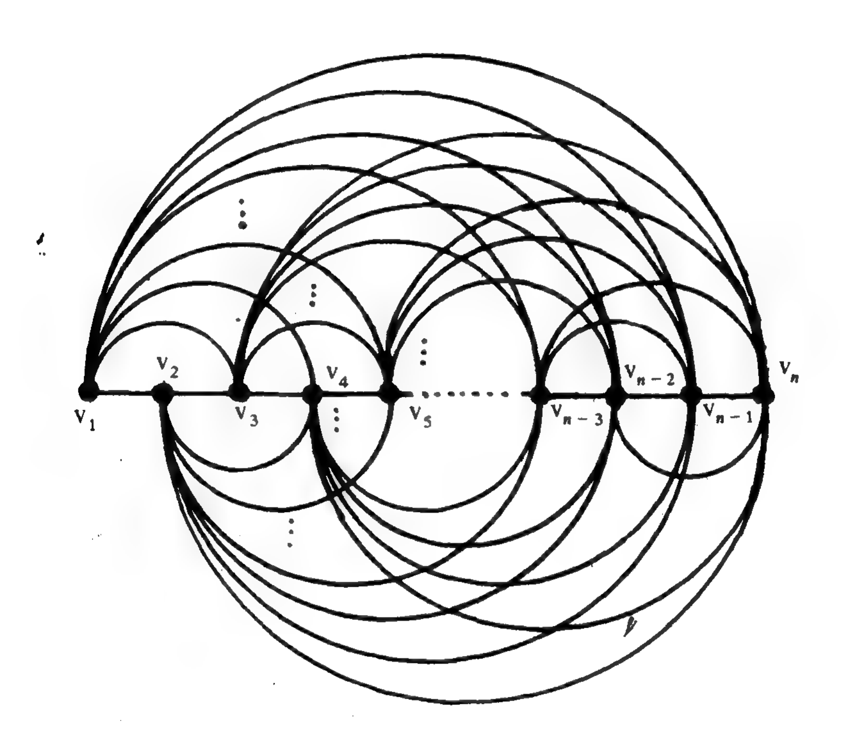
$$+ \dots$$

$$+ \left(\frac{n}{2} - 2\right)[2 + 1] + \left(\frac{n}{2} - 2\right)[1].$$

$$= \sum_{r=1}^{(n/2)-2} r \left[\sum_{i=1}^{n-2-2r} i + \sum_{i=1}^{n-3-2r} i \right]$$

$$= \sum_{r=1}^{(n/2)-2} r(n - 2 - 2r)^2$$

$$= n(n-2)^2(n-4)/48.$$



شكل (4 ـ 15) علما بان n زوجي

ويمكن اثبات الحالة الثانية عندما n عدد فردي بطريقة مماثلة . ونترك تفاصيل البرهان تمريناً للطالب . ∎

وقد اثبت Saaty سنة 1964 وجود قيد اعلى أصغر من ذلك المعطى في المبرهنة (4 ـ 11) . ومن المفيد ذكره هنا في المبرهنة التالية بدون ذكر البرهان .

مبرهنة (4 - 12) : لكل n ، $n \geqq 4$. لدينا

$$\nu(K_n) \leqq \begin{cases} n(n-2)^2(n-4)/64 & \text{عندما } n \text{ عدد زوجي} \\ (n-1)^2(n-3)^2/64 & \text{عندما } n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

بخصوص القيد الاعلى لعدد التقاطع لبيان ثنائي التجزئة تام . فلدينا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (4 - 13) :

$$\nu(K_{m,n}) \leqq \begin{cases} (r^2-r)(s^2-s), & \text{عندما } m=2r, n=2s \\ (r^2-r)s^2 & \text{عندما } m=2r, n=2s+1 \\ r^2(s^2-s) & \text{عندما } m=2r+1, n=2s \\ r^2 s^2 & \text{عندما } m=2r+1, n=2s+1 \end{cases}$$

علماً ان r و s عددان صحيحان موجبان .

البرهان : الطريقة المتبعة في اثبات هذه المبرهنة تشبه لحد ما تلك التي اتبعت في اثبات المبرهنة (4 11) .

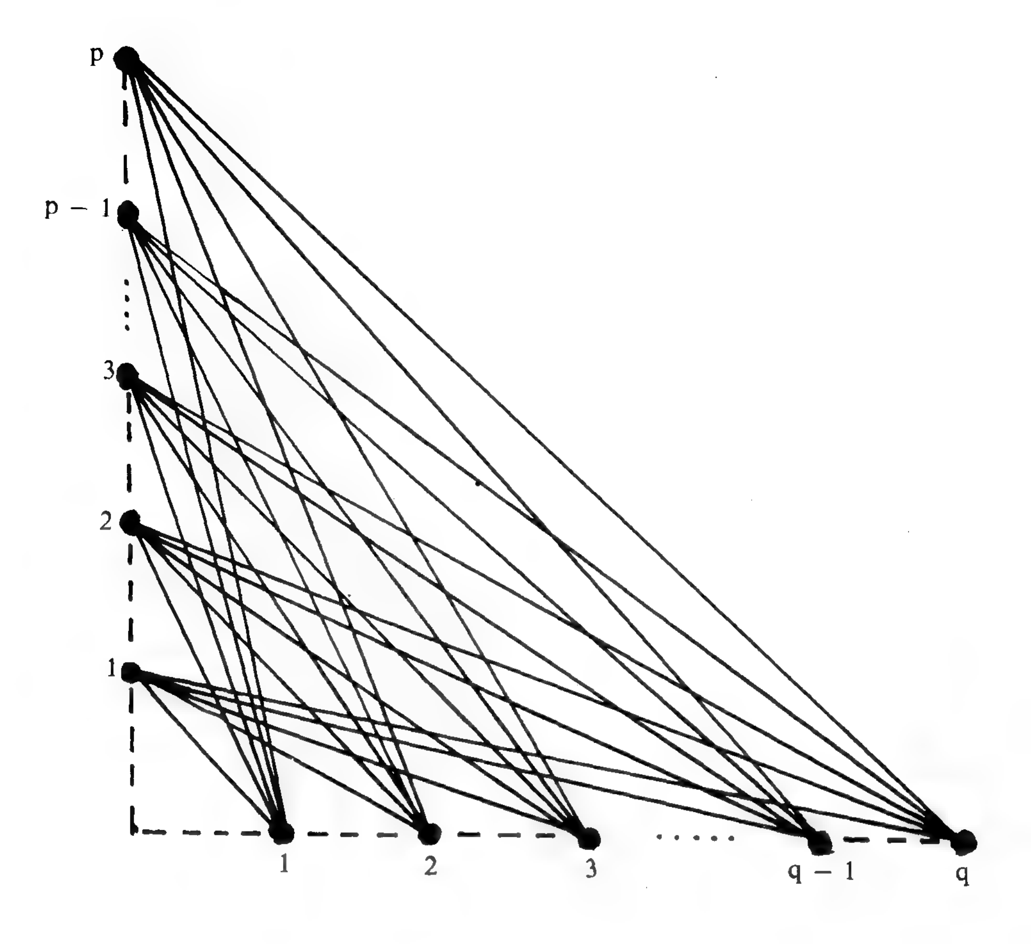
نأخذ على المحور - x النقاط ذات الاحداثيات السينية $1.2.....q$
ونأخذ على المحور- y النقاط ذات الاحداثيات الصادية $1.2.....p$. ونعتبر كلاً من هذه النقاط رأسا . ثم نصل بحافات مستقيمة كلاً من الرؤوس الواقعة على المحور -x بكل من الرؤوس الواقعة على المحور - y . كما هو مبين في الشكل (4 16) .

لما كان عدد تقاطعات الحافات الواقعة على الرأس الممثل بالنقطة i . حيث $2 \leqq i \leqq p$. على المحور - y . مع الحافات الواقعة على الرؤوس الممثلة بالنقاط $1.2.....i-1$. على المحور -y ايضاً . هو .

$$(i-1)[(q-1)+(q-2)+\ldots+2+1].$$

فان مجموع تقاطعات كل الحافات مع بعضها هو

$$\aleph = \frac{1}{2}q(q-1)[1+2+\ldots+(p-1)]$$



شكل (4 - 16)

$$= \frac{1}{4}(q^2 - q)(p^2 - p). \qquad \ldots\ldots (10 - 4)$$

سوف نستخدم هذه النتيجة في اكمال برهان المبرهنة .

اذا كان $m = 2r$ ، نأخذ على المحور- x النقاط بالاحداثيات السينية

$$-r, -(r-1), \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, r.$$

اذا كان $m = 2r + 1$ ، نأخذ على المحور- x النقاط بالاحداثيات

$$-r, -(r-1), \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, r, (r+1).$$

واذا كان $n = 2s$. نأخذ على المحور y النقاط بالاحداثيات

$$-s, -(s-1), \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, s.$$

واذا كان $n = 2s + 1$. نأخذ على المحور y النقاط بالاحداثيات

$$-s, -(s-1), \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, s, (s+1).$$

بأعتبار النقاط الواقعة على المحورين والمذكورة اعلاه رؤوساً . نصل بحافات مستقيمة كلاً مـن الرؤوس الواقعـة على المحور-x مع كل من الرؤوس الواقعـــة على المحور ـ y .
فنحصل على البيان الثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$.
اذا كان $m = 2r$ ، $n = 2s$. نحصل باستعمال (4 8) على

$$v(K_{m,n}) \leqq 4\left[\frac{1}{4}(r^2-r)(s^2-s)\right] = (r^2-r)(s^2-s).$$

واذا كان $m = 2r$ ، $n = 2s + 1$. نحصل على

$$v(K_{m,n}) \leqq 2\left[\frac{1}{4}(r^2-r).s(s+1)\right] + 2\left[\frac{1}{4}(r^2-r)(s^2-s)\right]$$

وبالتبسيط نحصل على

$$v(K_{m,n}) \leqq (r^2-r)s^2.$$

وبالمثل . يمكن اثبات الحالتين الاخريين . وبهذا يتم البرهان . ■
سوف نثبت في المبرهنـة (4 14) أن القيد الاعلى المعطى في المبرهنة (4 13) هوفي الحقيقة القيمة المضبوط لـ $v(K_{m,n})$. ولأجل ذلك نحتاج الى المأخوذة الآتية .

<u>مأخوذة (4 1) :</u>

$$v(K_{m,3}) \geqq \begin{cases} r^2 - r, & m = 2r \quad \text{عندما} \\ r^2 & m = 2r+1 \quad \text{عندما} \end{cases}$$

<u>البرهان</u> : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على r . فاذا كان $r = 1$. فان $v(K_{2,3}) = 0$. $v(K_{3,3}) = 1$. ثـم نفرض أن المأخـوذة صحيحـة لـ $(r-1)$ ونبرهن على أنها صحيحة لـ r .

لتكن مجموعتي رؤوس $K_{m,3}$ هما :

$$V = \{ v_1, v_2, \dots, v_m \} , U = \{ u_1, u_2, u_3 \} .$$

بالطبع كل رأس في V متجاور مع كل رأس في U . وان الرؤوس في V غير متجاورة مثنى مثنى . وكذلك الرؤوس في U . لنرمز للبيان الثنائي التجزئة التام $K_{3,1}$ الذي مجموعتا رؤوسه U و $\{ v_i \}$ بالرمز S_i لكل $i = 1,2,\dots,m$.

اذا كان كل زوج من البيانات الجزئية S_i ، $i = 1,2,\dots,m$. يشتركان في نقطة ليست رأساً في $K_{m,3}$. فاننا نحصل على قيد أدنى لعدد تقاطعات حافات $K_{m,3}$ بأخذ البيانات S_i مثنى مثنى . وهذه تؤدي إلى أن عدد التقاطعات لا يقل عن

$$\nu (K_{m,3}) = \binom{m}{2} = \frac{1}{2} m (m - 1) .$$

فاذا كان $m = 2r$.

$$\nu (K_{m,3}) = \frac{1}{2} (2r) (2r - 1) = r (r - 1) + r^2 > r^2 - r .$$

واذا كان $m = 2r + 1$.

$$\nu (K_{m,3}) = \frac{1}{2} (2r + 1) (2r) = r^2 + (r^2 + r) > r^2 .$$

وفي هذه الحالة يتم البرهان .

بقي أن نفرض أن هنالك زوجاً S_j , S_k ، $j \neq k$ ، من هذه البيانات الجزئية بحيث لاتوجد نقطة تقاطع بين حافاتهما. ليكن S' البيان الثنائي التجزئة التام المكون من S_j و S_k سوية . كل واحد من البيانات الجزئية S_i ، $i \neq j,k$ ، وعددها $(m-2)$ يُكوّنُ مع S' بياناً ثنائي التجزئة تام $K_{3,3}$ وهو الذي فيه نقطة تقاطع واحدة فقط بين حافاته . وعليه ، فان حافات S' تقطع بقية حافات $K_{m,3}$. بما لايقل عن $m-2$ من النقاط المختلفة . لاحظ أنه لا يُسمح لأكثر من حافتين بالتقاطع في نقطة واحدة . وعليه ، فان

$$\nu (K_{m,3}) \geqq \nu (K_{m-2,3}) + (m - 2) .$$

وهكذا . بموجب فرض الاستقراء الرياضي نحصل على

$$v(K_{m,3}) \geqq (r-1)^2 - (r-1) + (2r-2) = r^2 - r.$$

عندما $m = 2r$

وعندما $m = 2r + 1$. نحصل على

$$v(K_{m,3}) \geqq (r-1)^2 + (2r-1) = r^2 .$$

وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (4 - 14) :

$$v(K_{m,n}) = \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & m = 2r, \ n = 2s \\ (r^2 - r)s^2, & m = 2r, \ n = 2s + 1 \\ r^2(s^2 - s), & m = 2r + 1, \ n = 2s \\ r^2 s^2 & m = 2r + 1, \ n = 2s + 1 \end{cases}$$

(عندما في كل حالة)

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي لاثبات أن الطرف الايمن من الصيغة المطلوب اثباتها هوقيد ادنى لـ $v(K_{m,n})$ وبذلك يتم اثبات المبرهنة باستعمال المبرهنة (4 - 13)·واضح أن هذه صحيحة عندما $n = 1, 2, 3$ ولكل قيم m .
لنفرض أنها صحيحة لـ $(n-1)$ ونبرهن على أنها صحيحة لـ n مع كل قيم m

لتكن مجموعتا رؤوس $K_{m,n}$ هما

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}, U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

ليكن $K_{m,n-1}$ هو البيان الثنائي التجزئة التام الناتج من $K_{m,n}$ بحذف الرأس u_n مع كافة الحافات الواقعة عليه .

بموجب المأخوذة (4 - 1) ، الحافات الواقعة على الرأس u_n تقطع الحافات الواقعة على الرأسين u_1, u_2 ، في $K_{m,n}$ ، بما لايقل عن $(r^2 - r)$ من النقاط عندما $m = 2r$ ، وبما لا يقل عن r^2 من النقاط عندما $m = 2r + 1$.
كذلك ، الحافات الواقعة على u_n تقطع الحافات الواقعة على الرأسين u_3 و u_4 بما لايقل عن $(r^2 - r)$ من النقاط عندما $m = 2r$

وبما لايقل عن r^2 عندما $m = 2r$ وهكذا بالنسبة للازواج المتتابعة من الرؤوس ، اي ان الحافات الواقعة على u_n تقطع الحافات الواقعة على كل من ازواج الرؤوس

$$(u_1, u_2), (u_3, u_4), \ldots, (u_{2s-3}, u_{2s-2})$$

عندما $n = 2s$ ،

$$(u_1, u_2), (u_3, u_4), \ldots, (u_{2s-1}, u_{2s})$$

عندما $n = 2s + 1$

بما لايقل عن N من النقاط ، حيث ان $N = r^2 - r$ عندما $m = 2r$ ، و $N = r^2$ عندما $m = 2r + 1$ وعليه ، فان الحافات الواقعة على u_n تقطع حافات $K_{m,n-1}$ بما لايقل عن MN من النقاط ، حيث ان $M = s - 1$ عندما $n = 2s$ ، و $M = s$ عندما $n = 2s + 1$.وهكذا ، فان

$$\nu (K_{m,n}) \geqq \nu (K_{m,n-1}) + MN$$

بموجب فرض الاستقراء الرياضي نحصل على

(أ) عندما $m = 2r , n = 2s$

$$\nu (K_{m,n}) \geqq (r^2 - r) (s - 1)^2 + (s - 1) (r^2 - r) = (r^2 - r) (s^2 - s).$$

(ب) عندما $m = 2r, n = 2s + 1$

$$\nu (K_{m,n}) \geqq (r^2 - r) (s^2 - s) + s (r^2 - r) = (r^2 - r) s^2$$

(ج) عندما $m = 2r + 1, n = 2s$

$$\nu (K_{m,n}) \geqq r^2 (s - 1)^2 + (s - 1) r^2 = r^2 (s^2 - s).$$

(د) عندما $m = 2r + 1, n = 2s + 1$

$$\nu (K_{m,n}) \geqq r^2 (s^2 - s) + sr^2 = r^2 s^2.$$

وبهذا يتم البرهان بموجب مبدأ الاستقراء الرياضي .

تمارين (4 - 3)

(1) إثبت فرع (ب) من النتيجة (4 - 6)

(2) إثبت النتيجة (4 - 7) . [تلميح: لاحظ أن $3f \leqq 2m$ ، وفي حالة عدم وجود مثلثات ، يكون $4f \leqq 2m$].

(3) إثبت أن

$$g(K_{m,n}) \geqq \left\{ \frac{1}{4}(m-2)(n-2) \right\} .$$

(4) إثبت انه لايوجد بيان تام له جنس يساوي 7 . ماهو العدد الصحيح الموجب الذي يلي 7 ولايكون جنساً لبيان تام. [تلميح: أبدأ ب K_{12} .].

(5) اذا كان $m = 2r$. فاثبت أن $\theta(K_{m,n}) \leq r$

(6) جد الجنس والسمك وعدد التقاطع لبيان بيترسن.

(7) اكمل برهان المبرهنة (4 - 11).

(8) إثبت أن

$$\nu(K_{m,n}) = \left[\frac{m}{2} \right] \left[\frac{m-1}{2} \right] \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

(4 - 5) الاثنينية (The Duality)

هنالك محكات أخرى للبيانات المستوية ظهرت بعدما أعطى كورَتوفسكي مبرهنته. ومن هذه المحكات الاثنينية (أوالثَّنوية). وقد عَبّروايتني (Whitney) عن استواء بيان ما بدلالةوجودبيان إثنيني له.

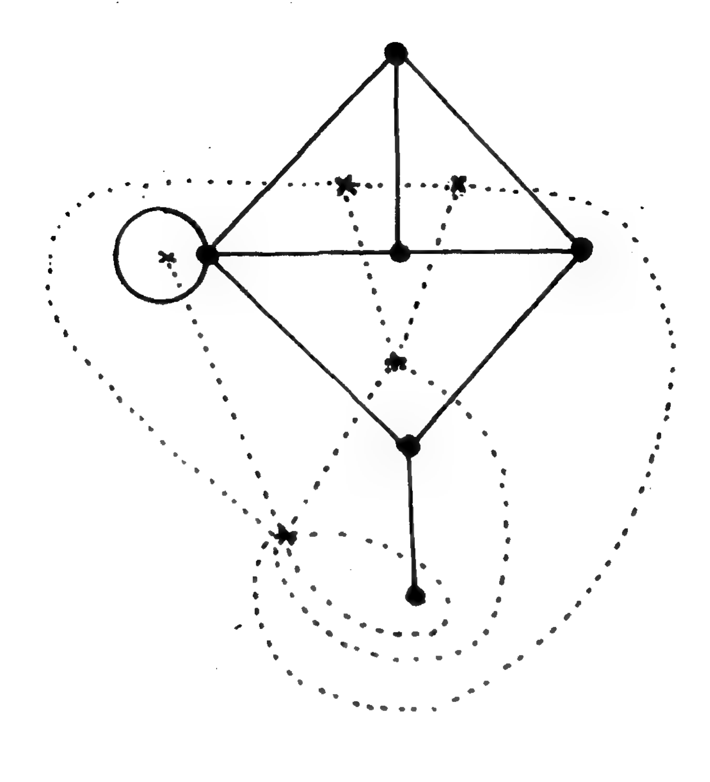
ليكن G بياناً مغموراً في المستوي (أي انه مرسوم في المستوي بدون ان يكون هنالك تقاطعات بين المنحنيات الممثلة لحافاته). ننشيء بياناً G_g^* . نطلق عليه اثنيني- هندسي (geometric - dual) للبيان G . بالخطوتين:

(أ) نختار نقطة واحدة. v_i^* . داخل كل وجه F_i (ومن ضمنها الوجه الخارجي) للبيان المستوي G . هذه النقاط هي رؤوس G_g^* .

(ب) مقابل كل حافة e_k في G نرسم خطاً e_k^* يقطع e_k (وبحيث لايقطع أية حافة أخرى)ويصل الرأسين v_i^* و v_j^* اللذين يقعان داخل الوجهين F_i و F_j (لايشترط ان يكونا مختلفين) اللذين يشترك تخماهما بالحافة e_k ; هذه الخطوط هي حافات G_g^* .

وتوضيحاً للاثنيني- الهندسي. أنظر الشكل (4 - 17) الذي فيه بيان مستوٍ G مع الاثنيني- الهندسي له G_g^* . وقد مُثِّلتْ رؤوسه بعلامات × وحافاته بخطوط منقطة.

لاحظ أن كل برزخ في G يقابل لفة في G_g^* . وأن كل لفة في G تقابل برزخاً في G_g^*

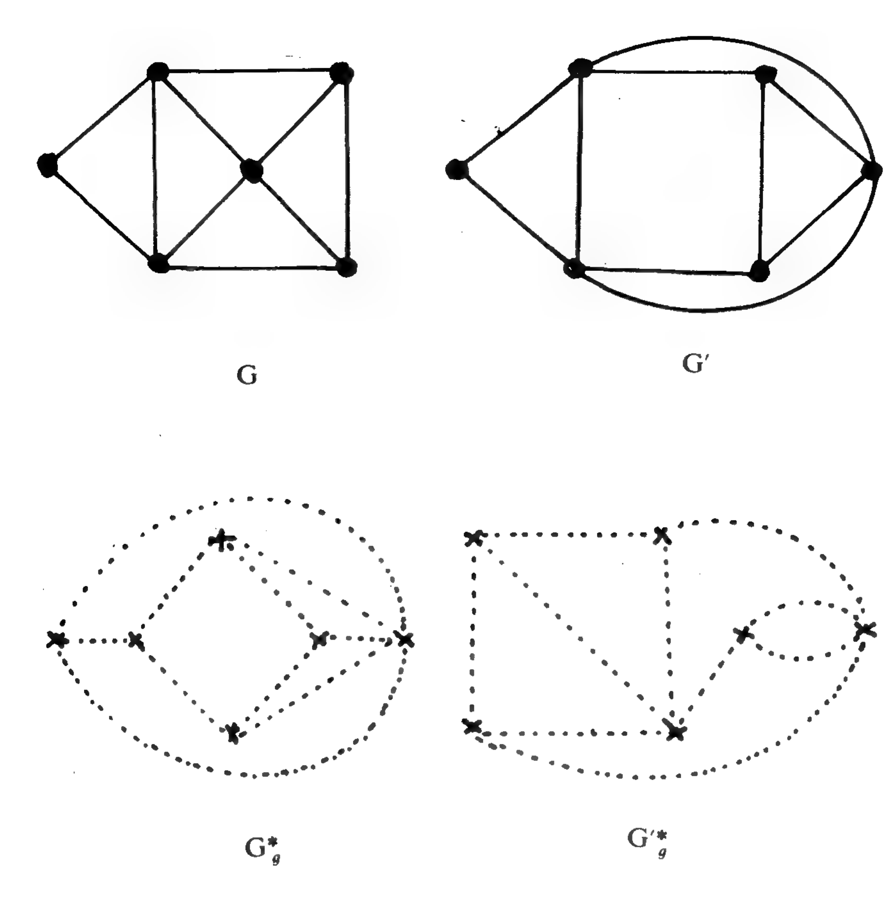


شكل (4 - 17)

كما أن G_g^* يحتوي على حافات مضاعفة اذا واذا فقط إحتوى G على وجهين يشترك تخماهما بحافتين على الأقل.

نؤكد أن الاثنيني- الهندسي G_g^* يعتمد مباشرة على غمر معين لـ G في المستوي. فاذا غمر G في المستوي بشكل مخالف أصبح بيانه الاثنيني- الهندسي مختلفاً عن سابقة. فاذا كان G و G' بيانين مستويين متشاكلين. فليس ضرورياً أن يكون G_g^* و $G_g'^*$ متشاكلين كما هو مبين في الشكل (4 18). من جهة أخرى. إذا كان كل من G_g^* و $G_g^{*\prime}$ اثنيني - هندسي لنفس التمثيل المستوي لبيان G. فان G_g^* و $G_g^{*\prime}$ متشاكلان.

من عملية إنشاء البيان الاثنيني- الهندسي G_g^* لبيان مستوٍ G. نستنتج ان G_g^* يكون مستوياً أيضاً. واذا قيل ان للبيان G إثنيني هندسي G_g^*. فان هذا يعني ان G بيان مستوٍ. لانه بموجب التعريف لايمكن ان يكون للبيان G إثنيني -هندسي إلاّ اذا كان مستوياً. اضافة الى ذلك. فان G_g^* يكون متصلاً دائماً سواء كان G متصلاً أو غير



شكل (4 - 18)

متصل. كما إنه اذا كان عدد الرؤوس. وعدد الحافات. وعدد الاوجه للبيان المستوي G هي. على الترتيب f. m. n . وللاثنيني- الهندسي هي $f^*. m^*. n^*$ فان

$$m^* = m. \qquad n^* = f.$$

وباستعمال صيغة أويلر. نجد ان

$$f^* = n\ .$$

يمكن تلخيص هذه العلاقات البسيطة في المأخوذة الآتية.

مأخوذة (4 - 2) : ليكن G_g^* الاثنيني- الهندسي لبيان مستوٍ G . فان G_g^* بيان متصل مستوٍ. وان

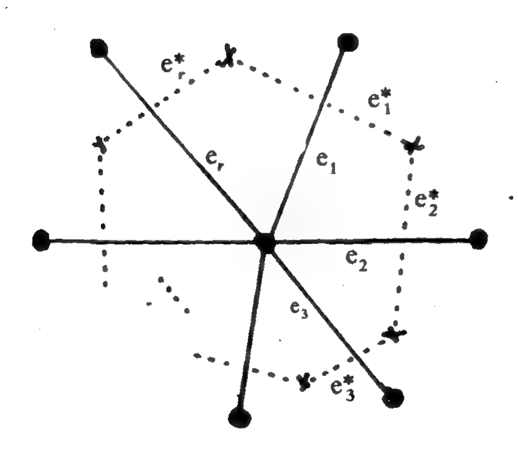
$$m^* = m. \qquad n^* = f\ . \qquad f^* = n\ .$$

من النتائج البسيطة الأخرى للاثنينية- الهندسية. المبرهنة التالية .

مبرهنة (4 - 15): اذا كان G بياناً متصلاً مستويا. وكان G_g^{**} الاثنيني الهندسي لـ G_g^*. فان G_g^{**} متشاكل مع G.

البرهان: بموجب المأخوذة (4 - 2) يكون G_g^* متصلاً ومستوياً. ولذلك فان لـ G_g^* بياناً إثنينياً- هندسياً. G_g^{**}.

اذا كان v أي رأس في G وكانت $e_1, e_2, \dots, e_r$ الحافات الواقعة على v بترتيب مثلاً. إتجاه حركة عقرب الساعة حول v. عندما يكون مغموراً في المستوي في هيئة استخراج G_g^* منه. فان كلاً من هذه الحافات تشترك في وجهين متجاورين [انظر الشكل (4 - 19)]. وبذلك. فان الحافات المقابلة $e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*$ تشكل دارة بسيطة في G_g^* وتحصر وجهاً واحداً منه. من جهة اخرى. وبموجب المأخوذة (4 - 2). فان $n = f^*$. وهكذا. فان كل وجه في G_g^* يحوي في داخله رأساً واحداً فقط من رؤوس G. وعليه. يمكن الحصول على G من G_g^* بعكس عملية إستخراج G_g^* من G. وبذلك فان G هو إثنيني- هندسي لـ G_g^*. أي أن. G_g^{**} متشاكل مع G.



شكل (4 - 19)

مبرهنة (4 - 16) : ليكن G بياناً مستوياً. و G_g^* إثنينياً هندسياً لـ G ، عندئـذ. مجموعة من حافات G تشكل دارة بسيطة في G اذا واذا فقط مجموعة الحافـــات المقابلة لها في G_g^* تشكل مجموعة قاطعة في G_g^* .

البرهان: بدون المساس بعمومية المسألة. يمكن أن نفرض أن G متصل ومغمور في المستوي.

اذا كانت C دارة بسيطة في G، فان C تحيط بعدد من أوجه G الداخلية . وبما أنـه يوجد رأس لـ G_g^* داخل كل وجه من أوجه G . فان هنالك مجموعة S^* من رؤوس G_g^* تقع داخل المنطقة المحاطة بـ C، وعليه . فان المجموعة C^* لكل حافات G_g^* التي تقابـل حافات C تشكل مجموعة فاصلة لـ G_g^* . وذلك لان ازالتها من G_g^* تفصله الى بيانيـن جزئيين H_1^* و H_2^*، مجموعة رؤوس الاول هي S^* ومجموعة رؤوس الثاني هي V^*-S^* ، حيث ان V^* هي مجموعة رؤوس G_g^*. ولما كانت كل حافة في C^* تصل رأساً في H_1^* برأس في H_2^* . وان كلا من H_1^* و H_2^* متصل .لكون أوجه G الواقعة داخل C متصلة مع بعضها وكذلك الاوجه الواقعة خارج C . فان C^* مجموعة قاطعة لـ G_g^*.

من جهة اخرى . يمكن اثبات أنه اذا كانت C^* مجموعة قاطعة لـ G_g^*. فان C دارة بسيطة لـ G. وذلك باتباع خطوات البرهان السابق بعكس الترتيب . فاذا كانت F_1 , F_2 مجموعتي اوجه G المقابلة لـ S^*, V^*-S^*. على التوالي . فان كل حافة في C تشترك بيـن تخمي وجه في F_1 مع وجه في F_2. لان كل حافة في C^* تصل رأساً في S^* برأس فـــي V^*-S^*. كذلك . كل حافة e في G التي تشترك بين تخمي وجه في F_1 مع وجه في F_2 تقابل حافة في C^*. لان C^* مجموعة قاطعة . وبذلك فان e في C . وعليه ، فـان حافات C تشكل دارة تفصل الاوجه F_1 عن الاوجه F_2. كما أن هذه الدارة بسيطـة ، لان خلاف ذلك يؤدي الى أن تصبح C^* اتحاد مجموعات قاطعة (بموجب الجـــزء الاول من البرهان) وهو خلاف الفرض .

وبهذا يتم البرهان . ■

نتيجة (4 — 9) : ليكن G بياناً مستوياً ، و G_g^* اثنينياً هندسـياً لـ G ، عندئذ، مجموعة من حافات G تشكل مجموعة قاطعة لـ G اذا واذا فقط مجموعة الحافات المقابلة لها في G_g^* تشكل دارة بسيطة لـ G_g^*

يمكن إثبات هذه النتيجة باستعمال المبرهنتين (4 – 15) و(4 – 16) . وقد تركت التفاصيل تمريناً للطالب.

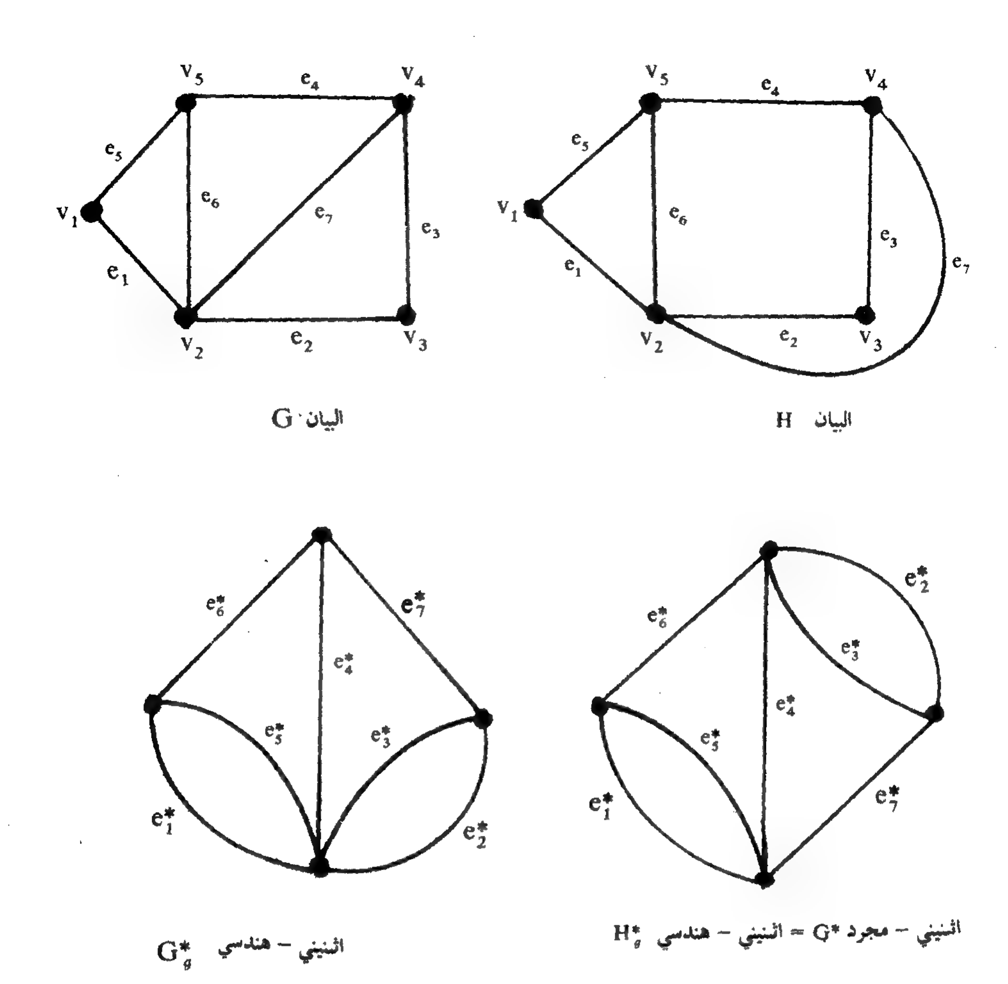
إذا أُعطينا أي بيان مستوٍ G. فان له اكثر من تمثيل هندسي واحد في المستوي. أي يمكن غمره في المستوي باكثر من هيئة واحدة. جميع التمثيلات الهندسية لـ G في المستوي تكون متشاكلة بعضها مع بعض. ولكن بياناتها الاثنينية– الهندسية قد لاتكون متشاكله. [انظر الشكل (4 – 15)]. ولذلك فليس لـ G إثنيني– هندسي وحيد. اضافة الى ذلك. اذا أعطينا بيان G . فليس لدينا طريقة لمعرفة فيما اذا كان لـ G إثنيني– هندسي أو ليس له ذلك. أي فيما اذا كان G مستوياً أو غير مستوٍ باستعمال الاثنينية الهندسية. وعليه فقد وجد من الضروري تعميم مفهوم الاثنينية– الهندسية بحيث يصبح بالامكان استعماله (ولو من ناحية مبدئية) لاختبار فيما اذا كان بيان ما مستوياً أ وغير مستوٍ. المبرهنة (4 – 16) تزودنا بعلاقة بين الدارات البسيطة لـ G والمجموعات القاطعة لـ G^*_g. وهذه العلاقة تمدنها بتعريف لاثنينية اكثر شمولاً من الاثنينية– الهندسية.

يقال لبيان G^* انه اثنيني –مجرد (abstract – dual) لبيان G اذا كان هنالك تقابل متباين بين حافات G وحافات G^* له الخاصية: مجموعة من حافات G تشكّل دارة بسيطة اذا واذا فقط مجموعة الحافات المقابلة لها تشكّل مجموعة قاطعة في G^*.

من المبرهنة (4 – 16) نستنتج انه اذا كان G بياناً متصلاً مستوياً. فان كل إثنيني– هندسي لـ G هو إثنيني– مجرد لـ G . ولكن. إثنيني– مجرد لـ G قد لايكون إثنينياً– هندسياً لـ G عندما يكون G مغموراً في المستوي بأي وضع كان. [انظر المبرهنة (4 – 20)]. فمثلاً. في الشكل (4 – 20). البيان G^* هو إثنيني– مجرد لـ G ولكنه ليس إثنينياً– هندسياً له. بل هو إثنيني– هندسي للبيان H المتشاكل مع G . لاحظ أن G^*_g هو اثنيني– هندسي لـ G . وأن الحافات المتقابلة من G وG^* أعطيت أدلة متساوية.

مما تقدم نستنتج أن الأثنينية– المجردة أشمل من الأثنينية– الهندسية. وسوف نثبت فيما يلي بعض ميزات الاثنينية– المجردة وخاصة تلك التي تتمتع بها الاثنينية– الهندسية.
مبرهنة (4 – 17): اذا كان G^* إثنينياً– مجرداً لبيان G . فان G إثنيني– مجرد لـ G^*

البرهان: لتكن C مجموعة قاطعة لـ G . ولتكن G^* مجموعة الحافات المقابلة لها في G^* . سنثبت أن C^* دارة بسيطة في G^* .بموجب المبرهنة (2 – 8) فإن C تشترك



G_g^* اثنيني – هندسي

اثنيني – مجرد G^* = اثنيني – هندسي H_g^*

شكل (4 - 20)

بعدد زوجي من الحافات مع كل دارة بسيطة في G . ولما كان G^* إثنينياً – مجرد ألـ G ، فان C^* تشترك بعدد زوجي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة لـ G^*. وباستعمال تمرين (5) من مجموعة تمارين (2–2) . نستنتج أن C^* هي دارة بسيطة أو اتحاد دارات بسيطة في G^* منفصلة بالنسبة للحافات.

ولكن. اذا كانت C_1^* دارة بسيطة في G^* . فانها تشترك بعدد زوجي من الحافات مع كل مجموعة قاطعة لـ G^* . وهكذا. فان مجموعة الحافات المقابلة C_1 تشترك بعدد زوجي من الحافات مع كل دارة بسيطة في G . اذاً. $\bar{C}_1$ هي مجموعة قاطعة أو اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة الحافات لـ G [انظر تمرين (6) من مجموعة تمارين (2 – 2)] .

من هذا نستنتج انه اذا كانت C^* إتحاد دارات بسيطة ، فان C يجب أن تكون اتحاد مجموعات قاطعة منفصلة بالنسبة للحافات لـ G ، وهو مايناقض فرضنا ان C مجموعة قاطعة. اذاً، C^* هي دارة بسيطة لـ G^* وليست إتحاد دارات بسيطة.

من جهة اخرى، نستنتج من الجزء الأخير من البرهان السابق الذكر انه اذا كانت C^* دارة بسيطة لـ G^* ، فان C مجموعة قاطعة لـ G .

وهكذا، بموجب تعريف الاثنينية- المجردة، فان G إثنيني- مجرد للبيان G^* .

كما سبق أن أشرنا ان كل بيان مستوٍ له إثنيني- هندسي ، وبذلك فان له إثنينياً-مجرداً وقد يسأل القاريء هل ان البيان الذي له إثنيني- مجرد يكون مستوياً؟ إن المبرهنة الآتية تجيب عن هذا السؤال بالأيجاب. وبذلك، فان الاثنينية المجردة، التي هي تعميم للاثنينية الهندسية، تزودنا بمحك للبيانات المستوية ،كما تزودنا بطريقة (ولو من ناحية مبدئية) لاختبار استواء او عدم إستواءِ بيان ما. لأجل اثبات المبرهنة المذكورة نحتاج الى المأخوذات الآتية.

<u>مأخوذة (4 – 3):</u> اذا كان لبيان G إثنيني مجرد، فان كل بيان جزئي من G له إثنيني- مجرد.

<u>البرهان:</u> ليكن G^* إثنينياً- مجرداً للبيان G . اذا كانت e حافة في G ، وكانت e^* الحافة المقابلة لها في G^* ، فان البيان G' الناتج من G بازالة e له إثنيني- مجرد ينتج من G^* بانكماش الحافة e^* . إن سبب ذلك يعود الى ان ازالة e من G تؤدي الى تحطيم كل الدارات البسيطة التي تحوي e ، وبالمقابل فان انكماش e^* في G^* يؤدي الى تحطيم كل المجموعات القاطعة التي تحوي e^*.

بتكرار عملية ازالة حافات G ، واحدة بعد الاخرى، وهي التي ليست في البيان الجزئي H لـ G ، نحصل بالمقابل على إثنيني- مجرد لـ H من G^* بانكماش الحافات

المقابلة لتلك التي أزيلت من G .

مأخوذة (4 – 4): اذا كان G' يكافيء توبولوجياً البيان G ، واذا وجد إثنيني– مجرد لـ G ، فانه يوجد إثنيني– مجرد لـ G'.

البرهان: لنفرض ان G^* اثنيني– مجرد لـ G . اذا كان v رأساً في G بدرجة 2 وأن e_1 وe_2 الحافتان الواقعتان على v ، فان e_1 وe_2 تشكّلان مجموعة قاطعة لـ G ، لذلك فان الحافتين المقابلتين لهما e_1^* و e_2^* تشكّلان في G^* دارة بسيطة .وعليه، فان ازالة v وابدال e_1 وe_2 بحافة واحدة e بين الرأسين الآخرين للحافتين e_1 و e_2، يقابلها في G^* ابدال e_1^* و e_2^* بحافة واحدة e^* بين نفس رأسيهما .

كما أن عملية ادخال رأس بدرجة 2 على حافة e في G يقابلها في G^* اضافة حافة أخرى بين رأسي e^*.

وهكذا ، فان للبيان G اثنينياً – مجرداً ، نحصل عليه من G^* بمضاعفة حافات أوحذف حافات من بعض الحافات المضاعفة وفقاً لعمليات الحصول على G' من G .

مأخوذة (4 – 5) : ليس للبيان $K_{3,3}$ ولا للبيان K_5 اثنيني – مجرد .

البرهان : نتبع طريقة التناقض في معالجة كل من البيانين $K_{3,3}$ و K_5
(1) نأخذ أولاً البيان K_5 .اذا كان G_1^* اثنيناً مجرداً للبيان K_5 ، فان طول كل دارة في G_1^* لايقل عن 4 لان عدد حافات كل مجموعة قاطعة لـ K_5 لايقل عن 4 وبذلك فان G_1^* بيان بسيط خالٍ من المثلثات . وبما أن هنالك مجموعة قاطعة في K_5 عدد حافاتها 6 ، فان هنالك في G_1^* دارة بسيطة طولها 6 أي أن عدد رؤوس G_1^* لايقل عن 6 . اذا كان عدد رؤوس G_1^* هو 6 ، فانه بموجب المبرهنة (2 – 6) لا يزيد عدد حافات G_1^* على $9 = (6/2)^2$.ولكن عدد حافات G_1^* هو 10 ، لذلك فان عدد رؤوس G_1^* لايقل عن 7.

ولما كان طول كل دارة بسيطة في K_5 لايقل عن 3 فان درجة كل رأس في G^* لاتقل

عن 3. وعليه. عندما يكون عدد رؤوس G_1^* اكبر من 6 . فان عدد حافاته لايقل عن $\frac{1}{2}$ (3) (7) أي لايقل عن 11. وفي هذه الحالة ايضاً نتوصل الى تناقض لان عدد حافات G_1^* هو 10 وبذلك . فليس لـ K_5 اثنيني – مجرد .

(2) نأخذ الان البيان $K_{3,3}$. اذا كان G_2^* اثنينياً مجرداً لـ $K_{3,3}$. فان G_2^* بيان بسيط . لأن عدد حافات كل مجموعة قاطعة لـ$K_{3,3}$ لايقل عن 3. وبما أن طول كل دارة بسيطة في $K_{3,3}$ هو 4 أو 6 فان درجة كل رأس في G_2^* لايقل عن 4 وأن عدد رؤوسه لايقل عن 5 . ان هذا يؤدي الى أن عدد حافات G_2^* لايقل عن (5) (4) $\frac{1}{2}$ وهو تناقض لكون عدد حافات G_2^* هو 9. ■

نحن الان مهيؤون لاثبات المبرهنة الاساسية الآتية .

مبرهنة (4 – 18) : يكون البيان G مستوياً اذا واذا فقط كان له اثنيني – مجرد .

البرهان : اذا كان G مستوياً . فان له اثنيني – هندسي . وبذلك فان لـ G اثنينياً – مجرداً .

لاثبات الاقتضاء المعاكس . نفرض أن G^* اثنيني – مجرد لـ G ونبرهن على أن G بيان مستوٍ بطريقة التناقض . فاذا كان G غير مستوٍ . فان فيه بياناً جزئياً H يكافيء توبولوجياً $K_{3,3}$ أو K_5 . وذلك بموجب مبرهنة كورتوفسكي . عندئذ . بموجب المأخوذة (4 – 3) . يكون لـ H اثنيني – مجرد . وبموجب المأخوذة (4 – 4) يكون لـ $K_{3,3}$ أو K_5 اثنيني – مجرد . وهوما يناقض المأخوذة (4 – 5) . وعليه . فان G بيان مستوٍ. ■

مبرهنة (4–19) : ليكن G^* إثنينياً مجرداً للبيان G . اذا كان G متصلاً وغير قابل للانفصال وكان G^* لايحتوي على رؤوس منعزلة . فان G^* متصل وغير قابل للانفصال .

البرهان : نتبع طريقة البرهان بالتناقض .

اذا كان G^* قابلاً للانفصال . وأن v^* نقطة مفصل . فيمكن تجزئة G^* الى بيانين جزئيين G_1^* و G_2^* فيهما رأس مشترك واحد فقط هو v^* ليكن G_1 و G_2 البيانين الجزئيين من G المكونين من الحافات المقابلة لحافات G_1^* و G_2^* على التوالي . عندئذ . تتجزأ حافات G الى حافات في G_1 والباقية في G_2 اذا كانت C دارة بسيطة في G تحتوي على حافات من G_1 مع حافات من G_2. فان المجموعة القاطعة المقابلة C^* تتكون من حافات من G_1^* مع

حافات من G_2^* وهذا غير ممكن لكون G^* قابلاً للانفصال فيصير G_1^* و G_2^* وعليه. فان كل دارة بسيطة في G تتكون اما من حافات في G_1 أومن حافات في G_2 وهذا يعني أن G غيرمتصل أوقابل للانفصال ـ مما يناقض الفرض لذلك . فان G^* غير قابل للانفصال

من جهة اخرى . اذا كان G^* غيرمتصل . فيمكن ان نبرهن بطريقة مماثلة على أن G غير متصل أو قابل للانفصال . وهكذا . فان G^* متصل وغير قابل للانفصال. ∎

نتيجة (4 – 10) : ليكن G^* إثنينياً مجرداً للبيان G . اذا كان كل من G و G^* متصلاً ـ فان G^* غير قابل للانفصال اذا واذا فقط G غير قابل للانفصال.
البرهان مباشر.

مبرهنة (4 – 20) : اذا كان G^* إثنينياً مجرداً لبيان متصل G غير قابل للانفصال وكان G^* بدون رؤوس منعزله. فانه يمكن غمر G في المستوي بحيث أن G^* هو الأثنيني الهندسي له.

البرهان: بموجب المبرهنة (4 – 18) . فان كلاً من G و G^* بيان مستو. كما انه بموجب المبرهنة (4 – 19) . فان G^* متصل وغير قابل للانفصال.

نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد حافات G . فاذا كان G مكوناً من حافة واحدة e . فان هذه الحافة تكون مجموعة قاطعة عندما يتكون G من رأسين فقط . وعندئذ يكون G^* لفة. أما اذا تكوّن G من رأس واحد. فان e لفة. وان G^* يتكوّن من حافة واحدة مختلفة الرأسين. وفي كلتا الحالتين. فان G^* هو الاثنيني الهندسي لـ G. والآن نفرض ان المبرهنة صحيحة لكل بيان متصل وغير قابل للانفصال وعدد حافاته $(m - 1)$

ليكن G بياناً متصلاً غير قابل للانفصال وعدد حافاته m.
اذا وجد في G رأس درجته 2 . فان ابدال الحافتين الواقعتين عليه e_1 , e_2 بحافة واحدة e يقابلها في G^* ابدال الحافتين e_1^* , e_2^* (تكونان دارة) بحافة e^* بين رأسيهما. فاذا رمزنا للبيانين الناتجين بـ H و H^* . فان H^* اثنيني مجرد لـ H وهو الذي عدد حافاته $(m - 1)$ وعليه. فان هنالك تمثيلاً مستوياً لـ H بحيث أن H^* هو الاثنيني الهندسي له (بموجب فرض الاستقراء الرياضي). وبتقسيم الحافة e الى الحافتين e_1 , e_2

يمكننا ان نحصل على تمثيل مستوٍ لـ G بحيث ان G^* هو الاثنيني الهندسي له.

وبالمثل يمكن أن نثبت المبرهنة في حالة إحتواء G على لفة.

والآن نفرض ان كل رأس في G هو بدرجة لاتقل عن 3 وانه خالٍ من اللفات . في هذه الحالة يمكننا أن نجد في G حافة $e = [u,v]$ تشترك بين تخميٍ وجهين داخليين. واضح ان البيان H الناتج من G بازالة الحافة e متصل وغير قابل للانفصال . كما أن البيان H^* الناتج من G^* بازالة الحافة المقابلة e^* وتطابق رأسيها . y^* ، x^* . هو اثنيني مجرد لـ H سنرمز للرأس الناتج من تطابق الرأسين x^* ، y^* بالرمز w^* .

لتكن $e^*, e_1^*, e_2^*, \ldots, e_r^*$ الحافات الواقعة على x^* . ولتكن $e^*, e_1'^*, e_2'^*, \ldots, e_s'^*$ الحافات الواقعة على y^* في الاثنيني المجرد G^* بما أن G^* غير قابل للانفصال . فان كلاً من $\{e^*, e_1^*, e_2^*, \ldots, e_r^*\}$ و $\{e^*, e_1'^*, e_2'^*, \ldots, e_s'^*\}$ مجموعة قاطعة لـ $\overline{G^*}$ وبذلك . فان كلاً من $\{e, e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ و $\{e, e_1', e_2', \ldots, e_s'\}$ دارة بسيطة في G . ولما كان H^* غير قابل للانفصال . فان الحافات

$$e_1^*, e_2^*, \ldots, e_r^*, e_1'^*, e_2'^*, \ldots, e_s'^*$$

الواقعة على الرأس w^* تشكل مجموعة قاطعة لـ H^* وبذلك . فان

$$e_1, e_2, \ldots, e_r, e_1', e_2', \ldots, e_s'$$

تشكل دارة بسيطة في H .

وبما أن الرأس w^* يقابل وجهاً F في التمثيل المستوي لـ H . فان الحافات الواقعة على w^* تقابل تخم F ؛ هذا يعني أن الدارة البسيطة المكونة من الحافات $e_1, e_2, \ldots, e_r, e_1', e_2', \ldots, e_s'$ هي تخم الوجه F من هذا نستنتج أن الرأسين u و v يقعان على تخم F لذلك فان اعادة الحافة e يؤدي الى تمثيل مستوٍ لـ G بحيث G^* هو الاثنيني الهندسي له .

وبهذا يتم البرهان . ∎

ليكن G^* اثنينياً مجرداً لبيان G . وأن F غابة مولدة لـ G ولتكن F^* مجموعة حافات G^* المقابلة لحافات F . بما أن F تشترك بحافة واحدة على الاقل مع كل مجموعة قاطعة لـ G . فان F^* تشترك بحافة واحدة على الاقل مع كل دارة في G^* ولذلك . فان البيان الجزئي H^* . حيث أن

$$H^* = G^* - F^* .$$

يكون خالياً من الدارات .

لتكن G_i^* مركبة لـ G^* وليكن H_i^* البيان الجزئي المكون من حافات H^* الموجودة في G_i^* اذا كان H_i^* غير متصل . فان هنالك مجموعة قاطعة S_i^* لـ G_i^* (وهكذا لـ G^*) تتكون من حافات في F^* فقط. وهذا يؤدي الى أن S_1 هي دارة لـ G . أي أن هنالك دارة بسيطة في F وهو يناقض كون F غابة . لذلك . فان H_i^* متصل . اذاً . H_i^* شجرة مولدة لـ G_i^* . وهذا بالطبع يصح لكل مركبة في G^* وعليه. فان H^* غابة مولدة لـ G^* ولذلك . فان F^* تتمة غابة لـ G^* . وهكذا فقد أثبتنا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (4 . 21) : اذا كان G^* اثنينياً مجرداً لبيان G . فان اية غابة مولدة لـ G تقابل تتمة غابة لـ G^*

نتيجة (4 . 11) اذا كان G^* اثنينياً مجرداً لبيان G . فان

$$\delta(G) = \gamma(G^*). \qquad \gamma(G) = \delta(G^*).$$

علماً أن γ هي مرتبة الدارات وأن δ هي مرتبة المجموعات القاطعة للبيان المذكور بين القوسين .

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنتين (4 . 17) و (4 . 21) . ونترك التفاصيل تمريناً للطالب .

تمارين (4 . 4)

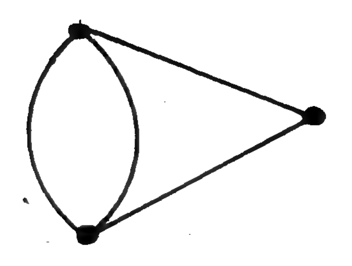
(1) جد الاثنيني الهندسي لكل من البيانات في الشكل (1 . 25)

(2) يقال لبيان G أنه اثنيني – ذاتي (self-dual) اذا كان متشاكلاً مع الاثنيني الهندسي G^* . هل W_n اثنيني – ذاتي ؟

وهل أن البيان في الشكل (4 . 21) اثنيني – ذاتي ؟

(3) اثبت نتيجة (4 . 9) .

(4) في الشكل (4 . 18) . اثبت أن G_n^* هو اثنيني – مجرد لـ G . ولكنه ليس اثنينياً هندسياً لـ G .



شكل (4 - 21)

(5) اثبت أنه اذا كان G بياناً مستوياً غير متصل . فان الاثنيني الهندسي المزدوج G_g^{**} غير متشاكل مع G

(6) هل يمكن ايجاد بيان مستو يحتوي على خمسة أوجه بحيث أن كل وجهين يشتركان بحافة ؟ [تلميح : استعمل المأخوذة (4 - 2) .]

(7) برهن على أنه اذا كان G بياناً مستوياً ثنائي التجزئة . فان الاثنيني الهندسي G_g^* يكون أويلرياً . هل أن العكس صحيح ؟

*(8) برهن على النتيجة (4 - 11) .

*(9) لنفرض أن G^* اثنيني – مجرد لبيان متصل G . هل أن G^* بيان متصل ؟ واذا كان G^* خالياً من الرؤوس المنعزلة . فهل هو متصل ؟

(4 – 6) الاثنينية التوافقية (اثنينية وايتني)

في سنة 1932 اعطى وايتني (Whitney) تعريفاً توافقياً للأثنينية . وهو الذي صاغ بواسطته الاثنينية الهندسية بصيغة مجردة . وفيما يلي تعريف اثنينية وايتني .

يقال أن G^* اثنيني وايتني (او اثنيني توافقي (combinatorial-dual) لبيان G اذا وجد تقابل متباين بين حافات G وحافات G^* بحيث أنه اذا كان H أي بيان جزئي من G وله نفس رؤوس G فان البيان الجزئي H^* لـ G^* الذي حافاته تقابل حافات H وله نفس رؤوس G^* . يحقق العلاقة :

$$\gamma(H) + \delta(\overline{H}^*) = \delta(G^*) . \qquad \ldots\ldots (11 - 4)$$

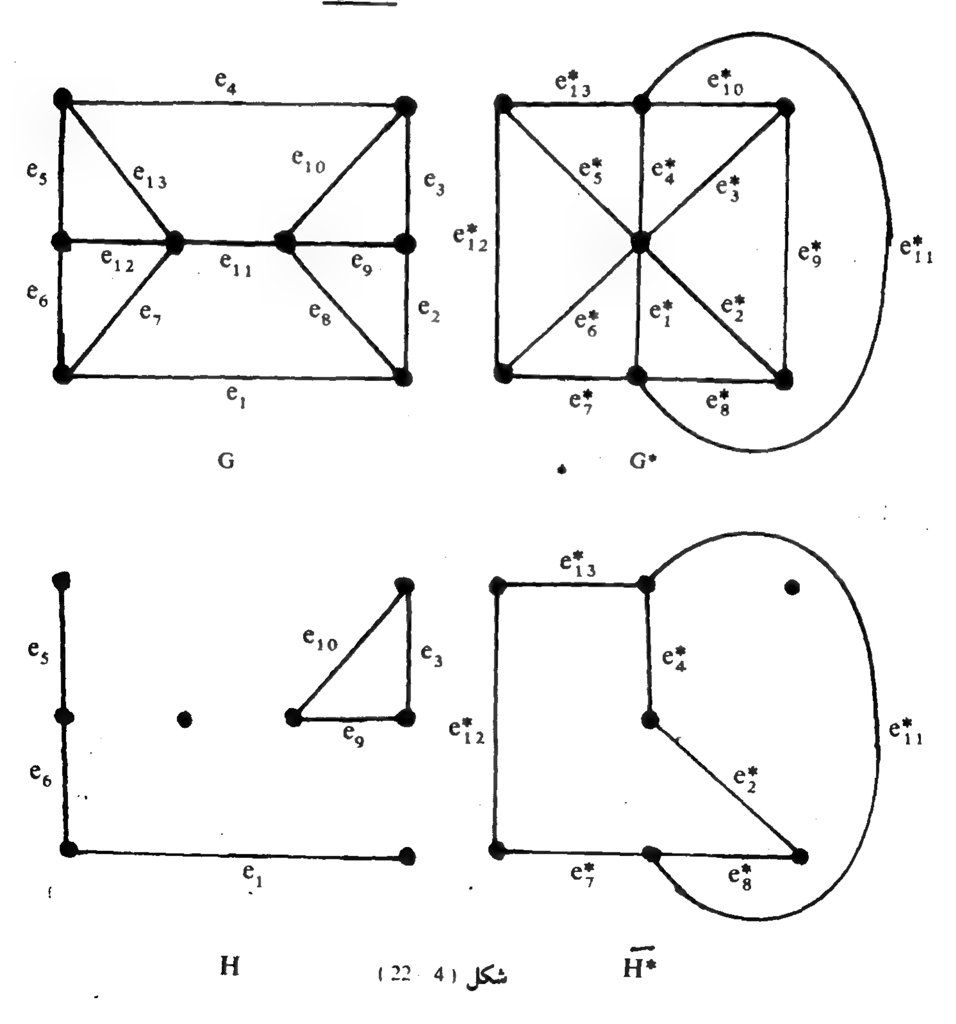
علما ان $\overline{H}^*$ هو البيان المتمم لـ H^* في G^* . وان γ هي مرتبة الدارات و δ مرتبة المجموعات القاطعة .

ولتوضيح هذا التعريف . تأمل البيانين G و G^* المبينين في الشكل (4 - 22) ، عندما نأخذ H البيان الجزئي الذي رؤوسه هي رؤوس G وحافاته هي $e_1, e_3, e_5, e_6, e_9, e_{10}$. فان $\overline{H}^*$ يتكون من الحافات $e_1^*, e_3^*, e_5^*, e_6^*, e_9^*, e_{10}^*$ وعندئذ يكون $\overline{H}^*$ كما هو مبين في الشكل (4 - 19) .ومن هذا الشكل . نحصل على

$\gamma(H) = 1, \delta(\overline{H}^*) = 5, \delta(G^*) = 6$.

وعليه . فان العلاقة (4 - 11) تتحقق بالنسبة للبيان الجزئي H .

واضح أنه من الصعوبة جداً معرفة فيما اذا كان G^* اثنيني وايتني لـ G باستعمال العلاقة (4 - 11) . لان ذلك يتطلب اختبار تحقق هذه العلاقة لكل البيانات الجزئية H لـ G



شكل (4 - 22)

والآن نبرهن على بعض المبرهنات والنتائج المباشرة من تعريف وايتني للاثنينيـــــة .

مبرهنة (4 - 22): باستعمال الرموز الواردة في تعريف اثنينية وايتني ، يكون لدينـــــا

$$(1)\quad \gamma(G) = \delta(G^*), \qquad (2)\quad \delta(G) = \gamma(G^*)$$

$$(3)\quad \delta(H) + \gamma(\bar{H}^*) = \delta(G).$$

البرهان : اذا وضعنا H = G في (4 - 11) تنتج المعادلة (1) ، لان $\bar{G}^*$ في G^* هـــو بيان خالٍ من الحافات وبذلك فان مرتبة المجموعات القاطعة له تساوي صفـــــراً .

سوف نرمز لعدد الحافات في البيانات G ، G^* ، H ، ... بالرمـــــوز ، m(G)، m(G^*)، m(H)، ...، على الترتيب . لما كانت مرتبة الدارات زائداً مرتبـــــة المجموعات القاطعات لـكل بيان يساوي دائماً عدد حافاته . فان

$$\gamma(G) + \delta(G) = m(G),\ \gamma(G^*) + \delta(G^*) = m(G^*).$$

وبما أن

$$m(G) = m(G^*),$$

وباستعمال المعادلة (1) التي اثبتناها . نحصل على المعادلة (2) .

والآن نبرهن على المعادلة (3) ، ولاجل ذلك نبدأ بالطرف الايسر .

$$\begin{aligned}\delta(H) + \gamma(\bar{H}^*) &= m(H) - \gamma(H) + m(\bar{H}^*) - \delta(\bar{H}^*)\\ &= m(H) + m(\bar{H}) - [\gamma(H) + \delta(\bar{H}^*)]\\ &= m(G) - \delta(G^*) &&\text{[من تعريف اثنينية وايتني]}\\ &= m(G) - \gamma(G) &&\text{[بموجب المعادلة (1)]}\\ &= \delta(G).\end{aligned}$$

وبذلك يتم البرهان .

من المعادلة (3) في المبرهنة (4 - 22) ومن تعريف اثنينية وايتني . نحصل مباشـرة على النتيجة الآتية :

نتيجة (4 - 12) : اذا كان G^* اثنيني وايتني لـ G . فان G هو اثنيني وايتني لـ G^* .

لاجل ان نثبت مبرهنة وايتني التي تقيس البيانات المستوية بدلالة الاثنينية التوافقية . نحتاج الى ان نبرهن على وجود تكافؤ بين الاثنينية التوافقية والاثنينية المجردة .

مبرهنة (4 - 23) : البيان G^* هو اثنيني وايتني لبيان G اذا واذا فقط G^* اثنيني - مجرد لـ G .

البرهان : ليكن G^* اثنينياً – مجرداً لـ G . سوف نبرهن على أن G^* اثنيني وايتني لـ G وذلك باثبات أن المعادلة (4 – 11) لاتتغير فيما اذا اضفنا حافة e . من حافات G . الى البيان الجزئي H . وازلنا الحافة المقابلة e^* من $\bar{H}^*$. والآن نناقش حالتين :

(أ) عندما يكون رأسا e في مركبة واحدة لـ H .

(ب) عندما يكون رأسا e في مركبتين مختلفتين لـ H .

الحالة (أ) : في هذه الحالة . عندما نضيف e الى H يزداد عدد الحافات بواحد ويبقى عدد الرؤوس وكذلك عدد المركبات ثابتاً . ولذلك . فان هذه الاضافة تزيد مرتبة الدارات $\gamma(H)$ واحداً فقط . من جهة اخرى . هذه الاضافة تشكل دارة بسيطة C في H تحتوي على e . وبما أن G^* هو اثنيني – مجرد لـ G . فان C^* مجموعة قاطعة لـ G^* تحتوي على e^* . لذلك . فان ازالة e^* من $\bar{H}^*$ يؤدي الى زيادة عدد مركباته بواحد فقط . مع ابقاء عدد الرؤوس ثابتاً . وعليه . تنقص مرتبة المجموعات القاطعة $\delta(\bar{H}^*)$ واحدا فقط . وبهذا . لاتتغير المعادلة (4 – 11) بهذه العملية .

الحالة (ب) : في هذه الحالة . عندما نضيف e الى H ينقص عدد مركبات H واحداً . ويزداد عدد حافاته واحداً . ولذلك . فان $\gamma(H)$ لايتغير.

واضافة الى ذلك . لاتتكون دارة جديدة في H . وبهذا . فان ازالة e^* من $\bar{H}^*$ لايشكل مجموعة قاطعة جديدة لـ $\bar{H}^*$. وعليه . نستنتج ان $\delta(\bar{H}^*)$ لايتغير بهذه العملية . وهكذا . فان المعادلة (4 – 11) لاتتغير بعملية اضافة e الى H وازالة e^* من $\bar{H}^*$.

لما كانت المعادلة (4 – 11) صحيحة عندما يكون H بياناً خالياً من الحافات . فانه بموجب الاستقراء الرياضي على عدد حافات البيان الجزئي H . تكون (4 – 11) صحيحة لكل بيان جزئي H لـ G . وبذلك . فان G^* هو اثنيني وايتني لـ G .

والآن نبرهن على انه اذا كان G^* اثنيني وايتني لـ G . فان G^* هو اثنيني – مجرد لـ G لاجل ذلك . نأخذ أية دارة بسيطة C في G . ولنفرض أن عدد رؤوس G^* هو n^* وعدد مركباته هو k^* . اذاً .

$$\gamma(C) = 1.\ \delta(G^*) = n^* - k^*.$$

وعليه . بموجب المعادلة (4 – 11) . نستنتج أن

$$\delta(\bar{C}^*) = n^* - (k^* + 1).$$

وهذا يعني ان C^* مجموعة فاصلة لـ G^* .

واذا كانت S مجموعة جزئية فعلية من مجموعة حافات C ، فان S ليست دارة ، لذلك $\gamma(C) = 0$ ؛ وهذا يؤدي الى

$$\delta(S^*) = n^* - k^*$$

وبذلك . فان S^* ليست مجموعة فاصلة لـ G^* . وعليه . لاتوجد مجموعة جزئية فعلية من C^* التي هي مجموعة فاصلة لـ G^* . اذاً . يجب أن تكون C^* مجموعة قاطعة .

وباتباع خطوات البرهان السابق بعكس الترتيب . يمكننا اثبات أنه اذا كانت C^* مجموعة قاطعة لـ G^* . فان C دارة بسيطة لـ G. ونترك تفاصيل برهان هذا الجزء كتمرين للطالب . وهكذا نستنتج ان G^* هو اثنيني – مجرد لـ G . وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (4 - 24) : – مبرهنة وايتني – يكون البيان G مستوياً اذا واذا فقط كان له اثنيني وايتني .

البرهان : بموجب المبرهنة (4 - 18) . يكون G مستوياً اذا واذا فقط يوجد له اثنيني – مجرد . وبموجب المبرهنة (4 - 23) . يكون لـ G اثنيني مجرد اذا واذا فقط كان له اثنيني وايتني . وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (4 - 25) : اذا كان G متصلاً وغير قابل للانفصال . وكان G^* اثنيني وايتني لـ G . وأن G^* لايحتوي على رؤوس منعزلة . فان G^* متصل وغير قابل للانفصال .

البرهان : بموجب المهرهنة (4 - 23) . يكون G^* اثنينياً – مجرداً لـ G . وبموجب المبرهنة (4 19) . يكون G^* متصلاً وغير قابل للانفصال .

ملاحظة : الشرط « G غيرقابل للانفصال » الوارد في المبرهنة (4 - 25) ضروري . كما هوواضح من التمرين (1) في مجموعة تمارين (4 - 5) . ولذلك . فان النص لهذه المبرهنة . وكذلك البرهان . الوارد في بعض الكتب (انظر المصدر [11] صفحة 38 . والمصدر [13] صفحة 80) غير صحيح .

يمكننا تلخيص بعض شروط ومحكات البيانات المستوية بالعبارات المتكافئة الآتية :

(1) G بيان مستو .

(2) لايوجد في G بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 أو $K_{3,3}$.

(3) لايوجد في G بيان جزئي قابل للانكماش الى K_5 أو $K_{3,3}$.

(4) يوجد اثنيني – هندسي لـ G .

(5) يوجد اثنيني – مجرد لـ G .

(6) يوجد اثنيني – وايتني لـ G .

علماً بان هنالك محكات اخرى لاستواء البيانات لم نتطرق الى ذكرها في هـــذا الكتاب ويمكن للقاريء الاطلاع عليها في كتب متقدمة .

تمارين (4 - 5)

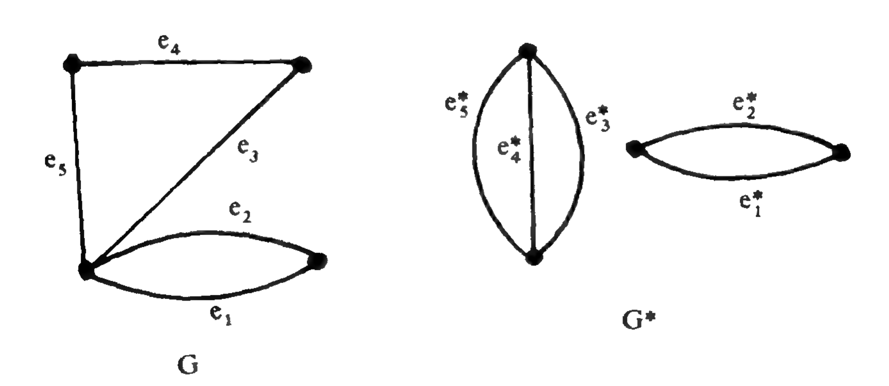
(1) هل ان البيان G^* المعطى في الشكل (4 - 23) هو بيان – وايتني لـ G ؟ ولماذا ؟

(2) جد اثنيني – وايتني متصل للبيان G المعطى في الشكل (4 - 23) .

(3) برهن على أن اي اثنيني – هندسي لبيان G هو اثنيني – وايتني لـ G .

(4) أكمل الجزء الاخير من برهان المبرهنة (4 - 23) .

(5) اذا كان G^* اثنيني – وايتني لبيان متصل غير قابل للانفصال G . فاثبت أنـــه يمكن غمر G في المستوي بحيث أن G^* هو اثنيني – هندسي له .



شكل (4 - 23)

الفصل الخامس

تلوين البيانات

لقد كان لمسالة الالوان الأربعة (Four – colour problem) أثر كبير في تطوير موضوع تلوين البيانات بشكل خاص وموضوع نظرية البيانات بشكل عام . فمنذ ان ظهرت هذه المسألة قبل مايزيد على قرن من الزمن . والباحثون المتخصصون في نظرية البيانات يحاولون أن يجدوا لها حلاً . ففي أثناء محاولاتهم هذه يجدون مفاهيم ومبرهنات ومسائل جديدة في موضوع نظرية البيانات . مما أدى الى تطور هذا الموضوع وتوسعه . ولهذا نجد من الضروري التأكيد على هذه المسألة التي حلت أخيراً في سنة ١٩٧٦ . وقد خصصنا البند (5 – 3) لشرحها .

هنالك ثلاثة انواع من مسائل التلوين . وهي : مسائل تلوين الرؤوس . تلوين الاوجه للبيانات المستوية . وتلوين الحافات . وقد خصص البند (5 – 1) لشرح تلوين الرؤوس مع تأكيد مبرهنة الالوان الخمسة .اما في البند (5 – 2) فقد إستعرضنا تلوين الاوجه للبيانات المستوية . اي تلوين الخرائط . وقد شرحنا في البند (5 – 4) تلوين الحافات . واخيراً . سوف نستعرض في البند (5 – 5) عدد طرق تلوين بيان ما . وذلك بدراسة متعددات الحدود للتلوين (وهي التي أطلقنا عليها حدوديات التلوين (Chromatic polynomials – .

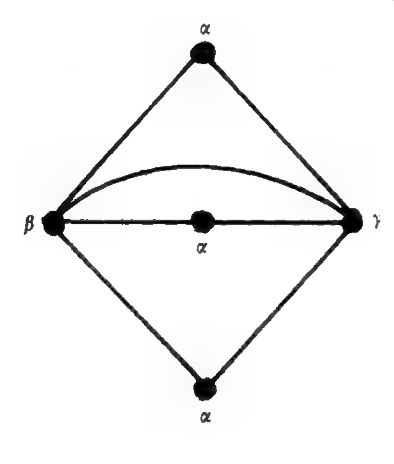
(5 – 1) تلوين الرؤوس : (Coloration of Vertices) :

ليكن G بياناً بسيطاً يقال أن G قابل التلوين - k للرؤوس إذا كان بالامكان تعيين لون واحد من k من الالوان لكل رأس من رؤوس G بحيث لايوجد رأسان متجاوران لهما نفس اللون . وبمعنى آخر . فان رؤوس G قابلة التلوين بـ k من الالوان المختلفة اذا امكن تجزئة مجموعة رؤوسه V الى k من المجموعات الجزئية $V_1 , V_2 , \ldots , V_k$ غير الخالية والمنفصلة مثنى مثنى . وأن

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i \ .$$

بحيث أنه لاتوجد حافات في G تصل رأسين في نفس المجموعة الجزئية V_i. ويقال في هذه الحالة أن مجموعة الرؤوس V_i لكل $i = 1, 2, \ldots, k$. مستقلة في G .

اذا كان G قابل التلوين - k للرؤوس ولكنه غير قابل التلوين - (k - 1) للـــرؤوس . فيقال إن G تلويني - k (k - chromatic) للرؤوس . أو ان عدد تلوين رؤوس G هو k . ويرمز عادة لعدد تلوين رؤوس البيان G بالرمز $\chi(G)$ وعليه . فان $\chi(\overline{G})$ هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث ان G قابل التلوين - $\chi(G)$ للرؤوس . فمثـــــلاً . البيان في الشكل (5 - 1) هو تلويني - 3 للرؤوس . وقد رمز للالوان بالحروف اليونانيـــة α, β, γ. بالطبع . فان هذا البيان قابل التلوين - k للرؤوس لكل $3 \leq k \leq 5$



شكل (5 - 1)

عندما نتكلم على تلوين الرؤوس . سنفترض دائماً أن البيانات بسيطة ، أي خالية من اللفات والحافات المضاعفة . كما نفرض أنها متصلة . لأن هذه كلها ليست ذات تأثير على تلوين الرؤوس.

من الامور التي تتبادر الى الذهن مباشرة كيفية إيجاد $\chi(G)$ لبيان كيفي G . يمكن معرفة عدد تلوين الرؤوس لبعض البيانات الخاصة مباشرة. فمثلاً.

$$\chi(K_n) = n, \qquad \chi(K_{m,n}) = 2.$$

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 \text{ ، عندما n فردي} \\ 4 \text{ ، عندما n زوجي} \end{cases}$$

من الامور الواضحة جداً أنه اذا كان G بياناً غير خال من الحافات . فان $\chi(G) = 2$ اذا واذا فقط G ثنائي التجزئة.

في حقيقة الامر ، اذا كان عدد رؤوس G هو n ، فان
$\chi(G) \leq n$.

واذا كان K_r بياناً جزئياً من G . فان

$$\chi(G) \geq r .$$

من هذا نستنتج وجود علاقة بين درجات رؤوس G والقيد الأعلى لعدد تلوين الرؤوس. كما هو مبين في المبرهنة الآتية.

مبرهنة (5 – 1) : اذا كانت p الدرجة العليا لرؤوس بيان G . فان G قابل التلوين–(p + 1) للرؤوس

البرهان: نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. واضح أن المبرهنة صحيحة اذا كان n = 0,1 . والآن نفرض أنها صحيحة لكل بيان ذي (n – 1) من الرؤوس.

ليكن G بياناً عدد رؤوسه n، وان أعلى درجة لرؤوسه هي p . ليكن v أي رأس في G . وليكن G′ البيان الحاصل من G بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه. لما كان عدد رؤوس G′ هو (n – 1) وان أعلى درجة لرؤوسه لاتزيد على p، فان G′ قابل التلوين –(p + 1) للرؤوس. بموجب فرض الاستقراء الرياضي. ولما كان عدد الرؤوس المجاورة للرأس v في G لايزيد على p. فانه بالامكان إعطاء لون الى v يختلف عن الالوان المعطاة للرؤوس المجاورة له في تلوين G′ . ويؤدي ذلك الى تلوين رؤوس G بما لايزيد على (p + 1) وهكذا فان G قابل التلوين (p + 1) للرؤوس. ■

أعطى بروكس (Brooks) سنة 1941 المبرهنة الآتية وهي أقوى من المبرهنة (5 – 1)

مبرهنة (5 – 2) : اذا كان G بياناً بسيطاً متصلاً غير تام، وكانت p أعلى درجة لرؤوسه. علماً أن p ≥ 3 . فان G قابل التلوين –p للرؤوس.

✱ البرهان: سنتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد رؤوس G . فاذا كان n = 4، و $G \neq K_4$، فان G قابل التلوين –p للرؤوس . والآن نفرض ان المبرهنة صحيحة لكل بيان غير تام له (n – 1) من الرؤوس. ولنفرض أن عدد رؤوس G هو n وان G غير تام، وان p أعلى درجة لرؤوسه.

اذا وجد رأس v في G درجته أقل من $\bar{p}$. فان ازالة الرأس v مع الحافات الواقعة عليه يؤدي الى بيان G' عدد رؤوسه $(n-1)$. واعلى درجة لرؤوسه لاتزيد على p. لذلك. فان G' قابل التلوين $-p$ للرؤوس بموجب فرض الاستقراء الرياضي. ولما كانت درجة v أقل من p. فانه يوجد هنالك لون. β. من هذه الألوان (وهي التي عددها p) يختلف عن الالوان التي أعطيت للرؤوس المجاورة لـ v. وباعطاء اللون β للرأس v نحصل على تلوين لرؤوس G بما لايزيد على p من الالوان.

اذا لم يكن في G رأس درجته أقل من p. فان G منتظم بدرجة p. وعليه. نفرض ان G بيان منتظم درجته p.

ليكن G' البيان الناتج من G بازالة رأس v مع كافة الحافات الواقعة عليه. البيان G' قابل التلوين $-p$ للرؤوس بموجب فرض الاستقراء الرياضي. والآن نثبت ان بالامكان الحصول على تلوين لـ G من تلوين G' بنفس العدد p من الالوان التي أستعملت في G'.

لتكن $v_1, v_2, \ldots, v_p$ الرؤوس المجاورة لـ v. ولنفرض انها اخذت الالوان المختلفة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. على الترتيب. في تلوين G'. بالطبع. اذا لم تكن الوان الرؤوس $v_1, v_2, \ldots, v_p$ مختلفة. فاننا نحصل مباشرة على تلوين لرؤوس G بنفس هذه الالوان.

لكل $i \neq j$، $1 \leq i,j \leq p$. نرمز بـ H_{ij} للبيان الجزئي من G' الذي يتكون من كل الرؤوس التي أعطيت أحد اللونين. α_i, α_j. مع جميع الحافات التي تصل رأساً لونه α_j برأس لونه α_i. اذا كان الرأسان v_i و v_j في مركبتين مختلفتين في H_{ij}. فانه يمكننا إعادة تلوين الرؤوس في المركبة التي فيها الرأس v_j وذلك بتبادل اللونين α_j؛ α_i كل محل الآخر في تلك المركبة فقط. وعند ذلك نحصل على تلوين لـ G' بحيث أن الرأسين v_i و v_j لهما نفس اللون α_i. وعندئذ. يمكننا تلوين الرأس v باللون α_j. فنحصل على تلوين لـ G بما لايزيد على p من الالوان. وهكذا سنستعرض فيما تبقى من البرهان حالة تلوين G' التي فيها. لكل $j \neq i$. الرأسان v_i ، v_j يقعان في نفس المركبة في H_{ij}. سنرمز لمركبة H_{ij} التي تحتوي على الرأسين v_i و v_j بالرمز C_{ij}.

اذا كان الرأس v_i متجاوراً مع أكثر من رأس واحد باللون α_j في C_{ij}. فان هنالك لون α_k (غير اللون α_i) الذي لم يُعط لأي رأس مجاور للرأس v_i. وذلك لأن درجة v_i

في G' هي $(p-1)$ وان هنالك p من الالوان المستعملة. في هذه الحالة يمكننا اعادة تلوين الرأس v_i باللون α_k واعطاء اللون α_i للرأس v. فنحصل على تلوين لـ G باستعمال نفس الالوان التي عددها p . وبطريقة مماثلة نناقش حالة وجود اكثر من رأس واحد متجاور مع v_j في C_{ij} .

اذا كانت درجة كل من v_j, v_i في C_{ij} هي 1 . فانه يمكننا ان نثبت بمناقشة مماثلة ان درجة كل رأس آخر في C_{ij} هي ٢. لأنه اذا كان u هو أول رأس على الدرب البسيط من v_i الى v_j في C_{ij} الذي درجته اكثر من 2 . فانه يمكننا إعادة تلوينه باستعمال لون يختلف عن α_i و α_j. وهذا بدوره يؤدي الى قطع الدرب بين v_i و v_j في C_{ij} . وعليه . يمكننا فرض أن C_{ij} ، لكل $i \neq j$. يتكون من درب بسيط واحد بين v_i و v_j.

والآن. يمكننا ان نلاحظ أن كل دربين بسيطين C_{ij} و C_{jk} . حيث $i \neq k$، لايشتركان إلا في الرأس v_j ؛ لأنه اذا كان رأساً آخر مشتركاً بين C_{ij} , C_{jk} فانه يمكننا اعادة تلوين بلون غير الالوان $\alpha_i . \alpha_j . \alpha_k$. مما يؤدي الى تناقض حقيقة وجود درب بسيط بين v_i و v_j في C_{ij} .

لكي نكمل البرهان. نأخذ أي رأسين مختلفين v_i و v_j من الرؤوس المجاورة للرأس v. اذا كان الرأسان v_i و v_j غير متجاورين. نفرض أن u رأس بلون α_j متجاور مع v_i . لما كان C_{jk} . لأي $j \neq k$. درباً بسيطاً. فانه يمكننا تبادل اللونين α_i و α_k للرؤوس الواقعة على هذا الدرب. كل محل الآخر. دون التأثير في تلوين بقية رؤوس البيان G'. ولكن هذا سوف يؤدي الى احدى الحالتين:

(أ) يصبح u مشتركاً بين C_{ij} و C_{ik} . في التلوين الجديد؛

(ب) لايبقى درب بسيط بين v_j, v_i أو بين v_j, v_k في التلوين الجديد.

كلتا الحالتين تؤديان الى انتهاء البرهان كما سبق أن ذكرنا في معالجة مثل هاتين الحالتين. أما اذا كان كل رأسين مختلفين v_i و v_j متجاورين ، فان ذلك يؤدي الى أن يصبح K_{p+1} بياناً جزئياً من G . ولكن. G بيان متصل منتظم درجته p ، لذلك فان $G = K_{p+1}$.

وهو مايناقض الفرض.

وبهذا نكون قد عالجنا كل الحالات الممكنة. وهكذا، فان G قابل التلويـن- p للرؤوس، وبذلك يتم البرهان. ■

من المبرهنة (5 - 2). نحصل مباشرة على النتيجة الآتية.

نتيجة (5 - 1) : كل بيان تكعيبي (أي منتظم بدرجة 3)، ماعدا K_4 . قابـل التلوين - 3 للرؤوس.

واضح أن مبرهنة بروكس قليلة الفائدة عندما يكون عدد الرؤوس قليلاً وأعلى درجة للرؤوس كبيرة. كما في البيان $K_{1,n}$ الذي هو قابل التلوين - n للرؤوس وفق مبرهنة بروكس. ولكنه في حقيقة الامر تلويني - 2 للرؤوس لانه ثنائي التجزئة.

يقال لمجموعة S من رؤوس بيان G أنها مستقلة (independent) في G اذا كان كل رأسين فيها غير متجاورين. ويعرف عدد إستقلال رؤوس البيان G على أنه عدد العناصر في اكبر مجموعة مستقلة. ويرمز لعدد الاستقلال بالرمز $\beta_0(G)$. واضح أن

$$\beta_0(K_n) = 1, \qquad \beta_0(K_{m,n}) = \max\{m, n\}.$$

هنالك قيود عليا ودنيا أخرى لعدد تلوين رؤوس بيان ما. تعتمد على عدد الاستقلال. كما هو مبين في المبرهنة التالية.

مبرهنة (5 - 3) : ليكن G بياناً عدد رؤوسه n، عندئذ

$$n / \beta_0(G) \leqq \chi(G) \leqq n - \beta_0(G) + 1 .$$

البرهان : يمكن تجزئة مجموعة رؤوس G الى $t\ (\chi(G) = t)$ من المجموعـات الجزئية $V_1, V_2, \ldots, V_t$ المستقلة. من تعريف عدد الاستقلال $\beta_0(G)$ ، لدينا

$$|V_i| \leqq \beta_0(G),$$

لكل $i = 1,2,\ldots,t$. وبذلك ، فان

$$n = \sum_{i=1}^{t} |V_i| \leqq t\,\beta_0(G).$$

ومنها نحصل على القيد الأدنى

$$n / \beta_0 (G) \leqq \chi (G) .$$

لاثبات القيد الأعلى لعدد تلوين الرؤوس. نفرض ان S مجموعة مستقلة عظمى من الرؤوس. أي

$$| S | = \beta_0 (G) .$$

ولنرمز بـ G' للبيان الحاصل من G بازالة كل رؤوس S مع كافة الحافات الواقعة عليها. واضح ان

$$\chi (G') \geqq \chi (G) - 1$$

$$\chi (G') \leqq n - \beta_0 (G) .$$

وعليه فان

$$\chi (G) \leqq \chi (G') + 1 \leqq n - \beta_0 (G) + 1 . \quad \blacksquare$$

مبرهنة (5 – 4) : ليكن G بياناً عدد رؤوسه n ، وليكن $\bar{G}$ البيان المتمم لـ G . عندئذ يكون

$$(1) \qquad 2 \sqrt{n} \leqq \chi (G) + \chi (\bar{G}) \leqq n + 1 ,$$

$$(2) \qquad n \leqq \chi (G) . \chi (\bar{G}) \leqq (n + 1)^2 / 4 .$$

البرهان: لنرمز $\chi (G) = t$ ، ولتكن V_i مجموعة الرؤوس ذات اللون α_i لكل $i = 1,2,\ldots,t$. واضح أن V_i مجموعة رؤوس مستقلة في G وان $V_1 , V_2 , \ldots , V_t$ تجزئة لمجموعة رؤوس G . بما أن

$$n = \sum_{i=1}^{t} | V_i | ,$$

فان

$$\max_i |V_i| \geqq n/t .$$

في $\bar{G}$ ، البيان الجزئي المقطعي الذي مجموعة رؤوسه V_i ، لكل $i = 1,2,\ldots,t$ ، هو بيان تام. وعليه ، فان

$$\chi(\bar{G}) \geqq \max_i |V_i| \geqq n/t .$$

اذاً

$$\chi(G) . \chi(\bar{G}) \geqq n .$$

وبما أن الوسط الهندسي لأي عددين موجبين لايزيد على وسطها الحسابي ، فان

$$\sqrt{\chi(G) . \chi(\bar{G})} \leqq [\chi(G) + \chi(\bar{G})]/2 ,$$

أي أن

$$2\sqrt{n} \leqq \chi(G) + \chi(\bar{G}) .$$

وبهذا يتم إثبات القيد الادنى لكل من (1) و (2) .
لاثبات

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leqq n + 1 ,$$

نستعمل طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. واضح أن المساواة لهذه المتباينة صحيحة عندما $n = 1$. وعليه، نفترض أن هذه المتباينة صحيحة لكل بيان عدد رؤوسه $(n - 1)$. ولنأخذ البيان G الذي عدد رؤوسه n. ليكن v أي رأس في G . وليكن H البيان الناتج من G بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه. واضح أن $\bar{H}$ ينتج من $\bar{G}$ بازالة الرأس v مع كل الحافات الواقعة عليه. لنفرض ان درجة الرأس v في G هي d . فتكون درجة v في $\bar{G}$ هي $(n - d - 1)$. يمكننا أن نلاحظ بسهولة أن

$$\chi(G) = \chi(H) + 1 \quad \text{أو} \quad \chi(G) = \chi(H) ,$$
$$\chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}) + 1 \quad \text{أو} \quad \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}) .$$

فاذا كان $\chi(G) = \chi(H)$. فان

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leqq \chi(H) + \chi(\bar{H}) + 1 \leqq n + 1 ,$$

بموجب فرض الاستقراء الرياضي.

واذا كان $\chi(G) = \chi(H) + 1$ و $\chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H})$ فان المتباينة صحيحة. والآن نآخذ الحالة الباقية وهي عندما .

$$\chi(G) = \chi(H) + 1, \quad \chi(\bar{G}) = \chi(\bar{H}) + 1.$$

واضح أن هذه تعني أن ازالة الرأس v من G و $\bar{G}$ تنقص عدد تلوين الرؤوس بواحد لكل منهما، لذلك فان

$$d \geqq \chi(H) \quad , \quad n - d - 1 \geqq \chi(\bar{H}).$$

اذاً

$$\chi(H) + \quad (\bar{H}) \leqq n - 1.$$

وهكذا ، فان المتباينة

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leqq n + 1,$$

لكل الحالات

وأخيراً، بتطبيق المتباينة الجبرية المعروفة

$$[\chi(G) + \chi(G)]^2 \leqq 4\chi(G) . \chi(\bar{G}),$$

نحصل على .

$$\chi(G) . \chi(\bar{G}) \leqq (n + 1)^2 / 4.$$

وبهذا يتم البرهان. ■

لدينا المبرهنة الآتية التي تتعلق بتلوين رؤوس البيانات المستوية، ويطلق عليها مبرهنة الالوان الخمسة ، وهي تعود الى العالم هيوود (Heawood) .

مبرهنة(5 – 5): كل بيان مستوٍ قابل التلوين-5 للرؤوس.

البرهان: لأجل البرهان، نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس. بموجب مبرهنة بروكس، تكون هذه المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد رؤوس البيان المستوي لايزيد على 6.

والآن، نفرض أن كل بيان مستوٍ قابل التلوين - 5 للرؤوس عندما يكون عدد رؤوسه

$(n - 1)$. ونتأمل بياناً مستوياً G، عدد رؤوسه n.

بموجب النتيجة $(4 - 5)$: يوجد في G راس v درجته لاتزيد على 5.

ليكن G' البيان الناتج من G بازالة الرأس v مع كافة الحافات الواقعة عليه. بطبيعة الأمر، البيان G' مستوٍ وعدد رؤوسه $(n - 1)$. وبذلك فهو قابل التلوين-5 للرؤوس بموجب فرض الاستقراء الرياضي.

اذا كان $\rho(v) \leq 4$. فان هنالك لون α من الالوان الخمسة المستعملة في تلوين G وهوالذي لم يعط لاي من الرؤوس المجاورة لـ v. وعليه، نعطي اللون α الى الرأس v فنحصل على تلوين لـ G باستعمال نفس الالوان الخمسة. وفي هذه الحالة يتم البرهان.

والآن، نفرض أن كل رأس في G بدرجة لاتقل عن 5، وان $\rho(v) = 5$. كما نفرض ان G مستوٍ أعظمي [راجع التعريف في بند $(4 - 1)$] (بطبيعة الامر، اذا كانت المبرهنة صحيحة لكل بيان مستوٍ أعظمي فانها صحيحة لكل بيان مستوٍ). لتكن v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 الرؤوس المجاورة لـ v مأخوذة بالترتيب وفق إتجاه حركة عقرب الساعة حول v. عندئذ، تكون $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ دارة بسيطة [انظر الشكل $(5 - 2)$] وذلك لكون G مستوياً أعظمياً.

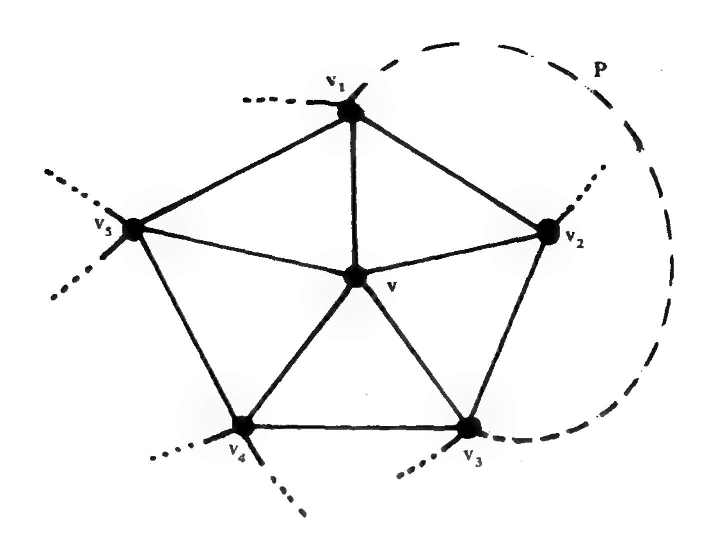
اذا كانت ألوان الرؤوس v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 في تلوين G' ليست كلها مختلفة، فيمكننا أن نحصل مباشرة على تلوين لـ G من تلوين G' باستعمال نفس الالوان الخمسة.

والآن نعالج الحالة التي فيها الوان الرؤوس v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 كلها مختلفة. لنفرض أن لون الرأس v_i هو α_i، لكل $i = 1, 2, \ldots, 5$.

كما في برهان المبرهنة $(5 - 2)$، نرمز H_{ij} للبيان الجزئي من G المكون من الرؤوس الملونة بـ α_i أو α_j مع كل الحافات في G' التي تصل رأساً بلون α_i مع رأس بلون α_j. لدينا الآن حالتان:

(أ) اذا كان الرأسان v_1 و v_3 واقعين في مركبتين مختلفتين في H_{13}، فيمكننا تبادل اللونين α_1 و α_3 كل محل الآخر لكافة الرؤوس الواقعة في مركبة H_{13} التي تحتوي على الرأس v_1. إعادة التلوين بهذا الشكل يجعل لون الرأس v_1 هو α_3 ويبقى الرأس v_3 باللون α_3. وبذلك يمكننا إعطاء اللون α_1 الى الرأس v فنحصل على تلوين G بخمسة الوان.

(ب) اذا كان الرأسان v_1 و v_3 واقعين في نفس المركبة في H_{13}، أي يوجد في H_{13} درب بين v_1 و v_3، فانه يوجد في G دارة بسيطة C بالصيغة $(v, v_1, \ldots, v_3, v)$



شكل (5 - 2)

كما موضح في الشكل (5 2) . حيث أن ($v_1 , \dots , v_3$) هو الدرب P الواقع في H_{13} والمرسوم منقطاً. بما أن G مستوٍوأن الرأس v_2 يقع داخل C وأن v_4 خارجها (أو v_2 يقع خارجها وv_4 داخلها). فانه لايوجد درب بين v_2 وv_4في H_{24} . أي ان v_2 وv_4 يقعان في مركبتين مختلفتين في H_{24} . وعندئذ يمكننا تبادل اللونين α_2 وα_4كل محل الآخرلجميع رؤوس مركبة H_{24} التي تحتوي على v_2 . وهكذا يصبح لون الرأس v_2 هو α_4 وبذلك يمكننا تلوين v باللون α_2 .

وبهذا يتم البرهان.∎

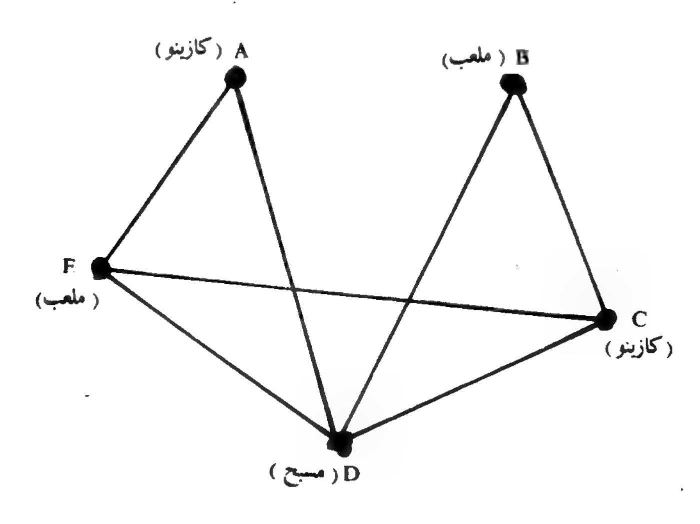
لقد ذكرنا أن لنظرية البيانات تطبيقات كثيرة ومتنوعة. ومن المفيد ان نشير هنا الى أن هنالك استخدامات بسيطة ومفيدة ومباشرة تستند الى مسائل تلوين رؤوس البيانات. كما هو مبين في المثال الآتي.

مثال: ترغب وزارة الشباب وضع خطة تتضمن بناء ملعب. مسبح. كازينوفي خمسة نواحٍ هي A.B.C.D.E ، وكانت الخطة تنص على بناء واحد فقط من المرافق الثلاثة في كل ناحية من النواحي الخمس. أضف الى ذلك. اذا كانت المسافة بين ناحيتيـــن

مختلفتين أقل او تساوي 10 كيلو مترات. فلا يبنى مرفقان متشابهان في هاتين الناحيتين. فاذا كانت المسافات بين هذه النواحي كما هي معطاة في الجدول الآتي. فهل يمكن تنفيذ الخطة؟

	A	B	C	D	E
A		12	15	8	7
B	12		6	9	14
C	15	6		10	9
D	8	9	10		8
E	7	14	9	8	

الحل : نمثل كل ناحية برأس . واذا كانت المسافة بين الناحيتين أقل أو تساوي 10 كيلومترات نصل الرأسين الممثلين لهما بحافة . فنحصل على البيان المبين في الشكل (5 - 3) فاذا كان بالامكان تلوين رؤوس هذا البيان بثلاثة الوان مختلفة . فانه يمكننا تنفيذ الخطة باعتبار ان كل لون يمثل بناء احد المرافق الخمسة . مثلاً . بناء كازينو في كل من الناحيتين A و C . وبناء ملعب في كل من الناحيتين B و E . وبناء مسبح في الناحية D .



شكل (5 - 3)

تمارين (5 – 1)

(1) لتكن C_n دارة بسيطة عدد رؤوسها n ، جد $\chi(C_n)$. واذا كانت T شجرة ، فما هو $\chi(T)$ ؟

(2) اثبت ان بياناً G ثنائي التلوين (bicolorable) ، أي قابل التلوين - 2 ، اذا واذا فقط كان خاليا من الدارات الفردية الطول .

(3) ليكن G_1 و G_2 بيانين بسيطين منفصلين . جد $\chi(G_1+G_2)$ ، $\chi(G_1 \cup G_2)$ بدلالة $\chi(G_1)$ و $\chi(G_2)$.

(4) اذا كان G بياناً بسيطاً منتظماً درجته d وعدد رؤوسه n فاثبت أن

$$\chi(G) \geqq n/(n-d).$$

(5) يقال لبيان G أنه حرج (critical) اذا كانت عملية ازالة أي رأس منه ، مع الحافات الواقعة عليه ، تؤدي الى تقليل عدد تلوين رؤوسه . فالبيان التام K_n ، $n > 1$ ، هو بيان حرج ، بينما $K_{n,m}$ ، $m, n > 1$ ، ليس حرجاً . اذا كان G بياناً حرجاً عدد تلوين رؤوسه هو χ ، فاثبت أن :

(أ) G متصل وغير قابل للانفصال .

(ب) لكل رأس v في G يكون $\rho(v) \geqq \chi - 1$

(6) اذا كان العدد اللوني لبيان G هو χ ، فاثبت ان G يحتوي على بيان جزئي حرج عدد تلوين رؤوسه هو χ ايضاً .

(7) اذا كان G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وسمكه θ ، فبرهن على أن

$$\chi(G) \leqq 6\theta.$$

[تلميح : استعمل النتيجة (4 - 2) لايجاد قيد أعلى لمجموع درجات رؤوس G ثم استنتج وجود رأس درجته لا تزيد على 5θ].

(8) اذا كان G بياناً بسيطاً عدد رؤوسه n وسمكه θ وخصره g فاثبت أن :

$$\chi(G) \leqq 2g\theta/(g-2).$$

ثم استنتج ان كل بيان مستوٍ خالٍ من المثلثات يكون قابل التلوين - 4 للرؤوس

[تلميح : استعمل تمرين (7) من مجموعة تمارين (4 - 1) لايجاد قيد أعلى لمجموع درجات رؤوس G . ثم استنتج وجود رأس بدرجة لا تزيد على $(2g\theta/(g-2)) - 1$].

(9) حل المثال المعطى في نهاية البند عندما يكون جدول المسافات بين النواحي كما هو مبين فيما يأتي :

	A	B	C	D	E
A		11	8	7	6
B	11		7	10	16
C	8	7		8	$9\frac{1}{2}$
D	7	10	8		10
E	6	16	$9\frac{1}{2}$	10	

(10) ترغب وزارة التربية في بناء 6 مدارس موزعة على القرى A, B, C, D, E, F بحيث أنها تبني في كل قرية من هذه القرى مدرسة واحدة فقط لاحدى المراحل الدراسية الثلاث ، الابتدائية او المتوسطة أو الثانوية . فاذا افترضنا ان كل طالب يستطيع أن يقطع (ماشياً اوراكباً) ما لايزيد على 5 كيلومترات من قريته الى مدرسة في قرية اخرى او بالعكس ، وكانت خطة الوزارة تهدف الى بناء هذه المدارس بحيث لا يكون البعد بين هذه القرى سبباً لحرمان أي طالب من طلابها من الدراسة مهما كانت مرحلة دراسته المدرسية . فاذا علمت ان المسافات بين القرى الست هي تلك المعطاة في الجدول الآتي ، فهل يمكن تنفيذ هذه الخطة ؟ واذا كان ذلك ممكنا ، فاذكر نوعية المدرسة (أي ابتدائية اومتوسطة أو ثانوية) التي ستبنى في كل من هذه القرى .

	A	B	C	D	E	F
A		5	6	$5\frac{1}{2}$	7	4
B	5		3	13	10	11
C	6	3		$4\frac{1}{2}$	9	8
D	$5\frac{1}{2}$	13	$4\frac{1}{2}$		4	12
E	7	10	9	4		$3\frac{1}{2}$
F	4	11	8	12	$3\frac{1}{2}$	

(5 – 2) تلوين الاوجه (تلوين الخرائط) :

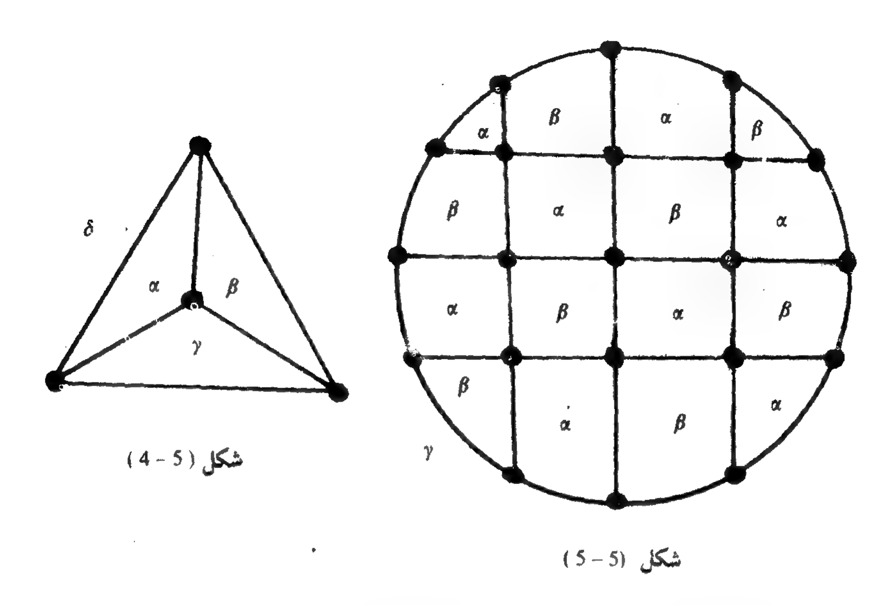
لقد برزت مسألة الالوان الاربعة من خلال تلوين الخرائط الجغرافية . من الطبيعي الاستفسار عن اقل عدد من الالوان التي نحتاج اليها لاجل تلوين خارطة معطاة بحيث ان اية منطقتين متجاورتين في تلك الخارطة تلونان بلونين مختلفين . ولقد لوحظ أن اربعة الوان كافية دائما لذلك ، ولكن لم يستطع احد اثبات هذه الحقيقة حتى عام 1976 . وسوف نقدم شرحاً مفصلاً لهذه المسألة في البند (5 – 3) . اما في هذا البند فسوف نستعرض بشكل عام ومختصر قضية تلوين اوجه بيان مستو G ، ونثبت العلاقة بين هذا التلوين وتلوين الرؤوس للاثنيني – الهندسي G_g^* .

لاجل صياغة عبارات دقيقة ، يجب علينا تعريف « الخارطة » . تعرف الخارطة (map) على انها سطح S مع بيان خال من البرازخ مغمور في S ؛ قد يكون السطح S هو المستوي او اي سطح مغلق قابل للتوجيه . وعندما يغمر البيان G في السطح S ، فان S يتجزأ الى مناطق يطلق عليها أوجه الخارطة (أو أوجه البيان G . عندما يكون السطح هو المستوي ، فاننا نقول للخارطة بانها خارطة مستوية .

يقال لخارطة M أنها قابلة التلوين – k للاوجه اذا أمكن تلوين أوجهها بما لايزيد على k من الالوان المختلفة بحيث ان كل وجهين متجاورين (اي يشترك تخماهما بحافة) لهما لونان مختلفان . ويعرف عدد التلوين لاوجه خارطة M ، والذي يرمز له $\phi(M)$ ، بانه اصغر عدد k بحيث ان M قابلة التلوين – k للاوجه . فمثلاً ، عدد التلوين لاوجه الخارطة المستوية المعطاة في الشكل (5 – 4) هو 4 ؛ وعدد التلوين لاوجه الخارطة المستوية المعطاة في الشكل (5 – 5) هو 3 .

نفرض بصورة عامة ، ان البيانات التي سنعالجها في هذا البند متصلة وخالية من البرازخ ، ولكنها قد تحتوي على لفات او حافات مضاعفة ؛ كما يمكننا الافتراض أنها لاتحتوي على رؤوس ثنائية الدرجة ، لان استحداث رأس ثنائي الدرجة ، أو دمج حافتين واقعتين على رأس ثنائي الدرجة بحافة واحدة ، لايغير من تلوين اوجه الخارطة .

لاجل الاختصار في الرموز ، سوف نرمز للخارطة المستوية ، المكونة من المستوي مع بيان مستو خال من البرازخ G ، بنفس رمز البيان المستوي ، أي G .



شكل (5 - 4)

شكل (5 - 5)

من مفهوم الاثنينية الهندسية للبيانات المستوية ، نحصل على المبرهنة الآتية التـــي تعطينا تلوين أوجه خارطة مستوية G من تلوين الرؤوس للاثنيني – الهندسي لـ G .

<u>مبرهنة (5 - 6)</u> : ليكن G بيانا متصلاً مستوياً خالياً من البرازخ ، وليكن G_g^* - الاثنيني الهندسي لـ G ؛ عندئذ تكون الخارطة المستوية G قابلة التلوين – k للاوجـه اذا واذا فقط G_g^* قابل التلوين – k للرؤوس .

<u>البرهان</u> : بما أن G خال من البرازخ ، فان G_g^* خال من اللفات .

لنفرض ان الخارطة المستوية G قابلة التلوين – k للاوجه . بما أن كل وجه في G يحتوي في داخله على رأس واحد فقط من رؤوس G_g^* ، فانه يمكننا تلوين رؤوس G_g^* بنفس ألوان الاوجه التي تقع في داخلها . من عملية انشاء الاثنيني الهندسي G_g^* من G . فان رأسين u و v متجاوران في G_g^* اذا واذا فقط كان الوجهان المقابلان لهما في G متجاورين . لذلك ، فان كل رأسين متجاورين في G_g^* لهما لونين مختلفين . وعليه ، فان G_g^* قابل التلوين– k للرؤوس . بنفس الوان أوجه الخارطة المستوية G .

وبطريقة مماثلة تماماً ، نثبت انه اذا كان G_g^* قابل التلوين — k للرؤوس ، فان الخارطة المستوية G قابلة التلوين — k للاوجه . ■

نستنتج من هذه المبرهنة ان أية مبرهنة في موضوع تلوين الرؤوس للبيانات المستوية الخالية من اللفات يقابلها مبرهنة اثنينية في موضوع تلوين الاوجه للخرائط والعكس بالعكس ؛ كما سوف نبين في المبرهنات الآتية .

مبرهنة (5 – 7) : خارطة مستوية G قابلة التلوين –2 للاوجه اذا واذا فقط G بيان أويلري .

البرهان : ليكن G_g^* الاثنيني الهندسي لـ G . بموجب المبرهنة (5 – 6) ، G قابلة التلوين –2 للاوجه اذا واذا فقط G_g^* قابل التلوين –2 للرؤوس . كما ان G_g^* قابل التلوين –2 للرؤوس اذا واذا فقط G_g^* ثنائي التجزئة . ولما كان G_g^* بياناً مستوياً ، فانه بموجب التمرين (7) من مجموعة تمارين (4 – 4) ، يكون G_g^* ثنائي التجزئة اذا واذا فقط G بيان أويلري . وبهذا يتم البرهان . ■

مبرهنة (5 – 8) :– مبرهنة الالوان الثلاثة –

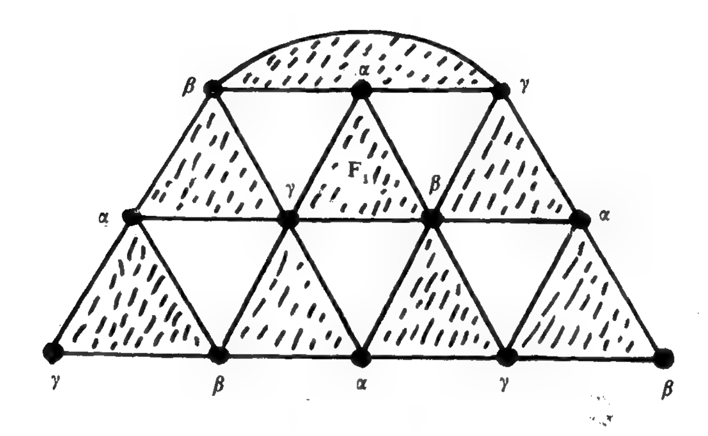
لتكن G خارطة مستوية تكعيبية ؛ عندئذ تكون G قابلة التلوين –3 للاوجه اذا واذا فقط أطوال تخوم أوجه G أعداد زوجية .

البرهان : تعرف الخارطة التكعيبية بأنها خارطة درجة كل رأس فيها هي 3

لنفرض ان الخارطة المستوية G قابلة التلوين –3 للاوجه . فاذا كان F أي وجه في G ، فان تخم F يشترك مع تخم كل وجه مجاور له بحافة واحدة فقط (لان G تكعيبي) فاذا كان F ملوناً باللون α ، فان الاوجه المجاورة لـ F تكون ملونة بـ β أو γ على التناوب ، ولذلك فان عددها يجب ان يكون زوجياً . اضافة الى ذلك ، لايوجد وجه يشترك مع F برأس واحد فقط ، لان خلاف ذلك يجعل درجته اكثرمن 3 . لذلك ، فان طول تخم F هو عدد زوجي .

والآن نفرض ان G خارطة مستوية تكعيبية تخوم أوجهها ذات أطوال زوجية . عندئذ ، تكون درجة كل رأس في G_g^* زوجية ، وكل وجه في G_g^* هومثلث ، علماً ان G_g^* هو الاثنيني الهندسي لـ G . وعليه ، فان G_g^* بيان أويلري . وهكذا ، بموجب المبرهنة (5 – 7) ، فان الخارطة المستوية G_g^* قابلة التلوين –2 للاوجه ، مثلاً ، باللونين الأسود والأبيض . بقي أن نثبت امكانية تلوين رؤوس G_g^* بثلاثة الوان α, β, γ .

نبدأ أولاً باي وجه ، F_1 ، ملون بالاسود ، ونلون رؤوسه الثلاثة بـ α, β, γ مرتبة باتجاه حركة عقرب الساعة حول F_1 . ثم نلون رؤوس كل وجه ملون بأسود ومشترك برأس مع الوجه F_1 بالالوان α, β, γ مرتبة باتجاه حركة عقرب الساعة حول ذلك الوجه . وهكذا يمكننا الاستمرار بأخذ الأوجه السود التي تحيط بوجه سبق أن لونت رؤوسه . [انظر الشكل (5 – 6) .] وبذلك يمكننا تلوين رؤوس G^*_g بالالوان الثلاثة α, β, γ . وعليه بموجب المبرهنة (5 – 6) ، فان الخارطة المستوية G قابلة التلوين - 3 للاوجه . وبهذا يتم البرهان



شكل (5 - 6)

تمارين (5 – 2)

(1) اثبت ان كل خارطة مستوية قابلة التلوين - 5 للاوجه .

(2) لنفرض ان المستوي قسمً الى عدد منته من المناطق يرسم عدد منتهٍ من الدوائر متساوية اومختلفة . متقاطعة اوغير متقاطعة . إثبت انه يمكن تلوين هذه المناطق بلونين فقط .

(3) أعد التمرين (2) مع ابدال كلمة دائرة بكلمة مستقيم .

(4) لتكن G خارطة مستوية عدد رؤوسها n ودرجة كل رأس فيها لاتقل عن 3 . إثبت ان

$$3f \geq m + 6 .$$

علماً ان f عدد أوجهها . و m هو عدد حافاتها .

(5) لتكن G خارطة درجة كل رأس فيها لاتقل عن 3 . فاذا علمت ان عدد اوجه G يقل عن 12 . فاثبت :

(أ) يوجد في G وجه طول تخمه لايزيد على 4 ؛
(ب) الخارطة المستوية G قابلة التلوين - 4 للاوجه .

(6) لتكن G خارطة مستوية لاتحتوي على وجه طول تخمه 2 ولاتحتوي على رؤوس ثنائية الدرجة . اثبت انه لايمكن ان تكون الخارطة المستوية G قابلة التلوين -2 للاوجه وفي الوقت نفسه يكون G قابل التلوين - 2 للرؤوس .
[تلميح : استعمل المبرهنة (5 - 7) ، وتمرين (2) من مجموعة تمارين (5 - 1) ، وتمرين (8) من مجموعة تمارين (4 - 1) .]

(7 *) إثبت انه اذا امكن تلوين وجوه اية خارطة مستوية تكعيبية باربعة الوان . فيمكن تلوين وجوه كل خارطة مستوية بما لايزيد على اربعة الوان

(8 *) تعرف الخارطة الطرية على أنها سطح طرة مع بيان طري مغمور فيها
إثبت ان كل خارطة طرية قابلة التلوين - 7 للاوجه .
[تلميح : استعمل المبرهنة (4 - 6) لاثبات أن هنالك دائماً وجه في البيان الطري تخمة لأيزيد على 6 ، وأخيراً اتبع الاستقراء الرياضي على عدد الاوجه .]

(9 *) ارسم خارطة طرية مؤلفة من 7 أوجه بحيث يكون كل وجه متجاوراً مع كل وجه آخر . ماذا تستنتج من وجود هكذا خارطة طرية ؟

(10*) يقال لخارطة مستوية أنها أعظمية اذا كان طول تخم كل وجه فيها هو 3 . اثبت ان كل خارطة مستوية أعظمية ، ماعدا K_4 . تكون قابلة التلوين - 3 للاوجه . [تلميح : استعمل مبدأ الاثنينية الهندسية . ومبرهنة (5 - 2) .]

(5 - 3) مبرهنة الالوان الاربعة :

ظهرت مسألة الالوان الاربعة قبل مايزيد على قرن من الزمن ولقد كتبت مقالات كثيرة عن تاريخ نشأتها . وقد حاول العديد من علماء الرياضيات ومعظم المختصين في نظرية البيانات حلها . أي اثبات صحتها أو اثبات عدم صحتها . ولقد أخذت تلك المحاولات الكثير من وقت وجهود العلماء الذين حاولوا حلها . حتى سماها البعض « مرض الالوان - الاربعة » . وكانت الرغبة في حلها تنتقل من الأستاذ الى طلبته . واحياناً من الوالد الى ولده . وقد يكون السبب الرئيسي لذلك هو بساطة فحواها . مما يجعل المتعرف عليها يعتقد بسهولة حلها .

ينص تكهن الالوان – الاربعة على : « كل خارطة مستوية قابلة التلوين – 4 للاوجه » ؛ أي أن أربعة الوان كافية دائماً لتلوين أوجه أية خارطة مستوية بحيث ان كل وجهين متجاورين يلونان بلونين مختلفين . »

يقال ان مسالة الالوان الاربعة قدمت لاول مرة من قبل عالم التوبولوجيا موبيس (Möbius) سنة 1840 . ويقال إن المسألة نشأت أصلاً عند رسامي الخرائط ، ولكن لايوجد أساس ثابت لذلك . ولكن الثابت في المصدر الاول المعروف عن تاريخ المسألة هو رسالة موجهة من استاذ الرياضيات في جامعة لندن أوغسطس دي مورغان (Augustus De Morgan) الى صديقه وزميله وليم روان هملتون (William Rowan Hamilton) الذي كان استاذاً في كلية ترينتي في دبلن ، وكان تاريخ الرسالة هو 23 تشرين الاول سنه 1852 . ولقد تضمنت الرسالة نص المسألة ، وذكر فيها دي مورغان انه علم بالمسألة من أحد طلبته واسمه فردريك كوثري (Fredrich Guthrie) الذي أخذها من اخيه فرنسيس كوثري مدعياً انه لاحظها عندما كان يلون خارطة لمقاطعات انكلترا . ولقد كان دي مورغان مهتماً بالمسألة كثيراً مما دفعه الى اخبار اصدقائه بها .

وفي سنة 1878 ، بعد موت دي مورغان ، قدّم كيلي (Cayley) المسألة في اجتماع جمعية الرياضيات اللندنية ، متسائلاً فيما اذا كانت قد حُلت أم لاتزال غير محلولة ، وذكر في حينه أنه غير قادر على حلها . وقد جلب ذلك انتباه المحامي كمبي (A. B. Kempe) ، الذي كان يعمل أمين صندوق ، وكان هاوياً للرياضيات . وفي سنة 1879 ، نشر كمبي مقالة في مجلة الرياضيات الاميريكية يثبت فيها صحة تلك المسألة . وبعد نشره البرهان ، اصبح كمبي رئيساً لجمعية الرياضيات اللندنية تثميناً لجهده في حل المسألة . وقد قبل الرياضيون البرهان الذي نشره كمبي في حينه ، ولكن في سنة 1890 ، أشار عالم الرياضيات هيوود (Heawood) ، وكان استاذاً في جامعة درهام ، الى وجود خلل في برهان كمبي لهذه المسألة .

وقد قبل علماء الرياضيات برهان كمبي لسنوات عديدة متصورين ان الخلل الذي فيه غير أساسي وانه يمكن التغلب عليه . ولكن ، بعد أن مضت سنوات كثيرة دون أن يصحح الخطأ من قبل علماء الرياضيات ، عند ذلك أيقنوا أن المسألة أعمق وأصعب مما كان متوقعاً . ومنذ ذلك التاريخ وعلماء الرياضيات يحاولون ايجاد الحل لهذه المسألة المستعصية ، حتى عام 1976 عندما نشر أبيل وهيكن (Appel and Haken) [14] الحل الايجابي للمسألة .

كما كان متوقعاً لهذه المسألة المنيعة، فان برهانها طويل جداً؛ فملخص البرهان يتكون من 100 صفحة بالحجم الكبير ، 100 صفحة تفاصيل، و700 صفحة عمل مساعد؛ اضافة الى ذلك فقد استغرقت الحسابات 1200 ساعة على الحاسبة الالكترونية.

بصورة عامة، عالج ايبل وهيكن مسألة تلوين الرؤوس لبيان مستوٍ خالٍ من اللفات، وهذه، بالطبع، مكافئة لمسألة تلوين الاوجه بموجب المبرهنة (5 – 6). اضافة الى ذلك، فقد إعتبرا البيان المطلوب تلوين رؤوسه يتكون من أوجه مثلثية، أي انه مستوٍ أعظمي. فاذا تم اثبات ان كل بيان مستوٍ أعظمي يكون قابل التلوين – 4 للرؤوس، فان كل بيان مستوٍ هو قابل التلوين – 4 للاوجه. وبما أن الاثنيني الهندسي لبيان مستوٍ اعظمي هو بيان مستوٍ تكعيبي خالٍ من البرازخ، فقد اصبحت المسألة المطلوب حلها بالصيغة: «كل بيان مستوٍ أعظمي قابل التلوين – 4 للرؤوس.»

إن الطريقة التي اتبعها أيبل وهيكن لاتختلف، من الناحية النظرية، كثيراً عن طريقة كمبي. ولهذا، فسوف نبدأ بشرح محاولة كمبي لأجل أن نفهم خطة أيبل وهيكن في إثبات مسألة الالوان الاربعة.

<u>برهان كمبي</u>: يبدا كمبي البرهان باستعمال صيغة أويلر. فاذا كان G بياناً مستوياً اعظمياً عدد رؤوسه n ، وعدد حافاته m وعدد أوجهه f ، فان.

$$n - m + f = 2$$

بما أن تخم كل وجه من أوجه G هو مثلث ، وكل حافة تشترك بين تخمي وجهين فقط ، فان $2m = 3f$. واذا كان ϕ_i عدد الرؤوس بدرجة i ، فان

$$\sum_{i=0} i\,\phi_i = 2m.$$

وبالتعويض في صيغة أويلر ، نحصل على

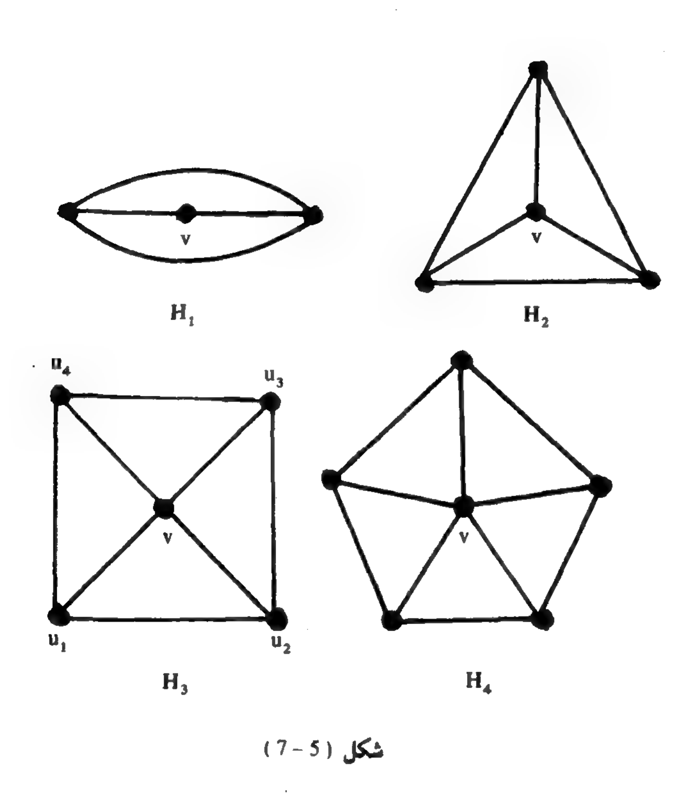
$$\sum_{i=0} (6-i)\,\phi_i = 12,$$

أي أن

$$4\phi_2 + 3\phi_3 + 2\phi_4 + \phi_5 - (\phi_7 + 2\phi_8 + 3\phi_9 + \ldots) = 12,$$

لان $\phi_o = \varphi_1 = 0$ لعدم وجود رؤوس بدرجة صفر أو واحد في G . من هذا نستنتج انه يجب ان يكون واحد على الاقل من الاعداد $\phi_2, \phi_3, \phi_4, \varphi_5$

موجباً . بمعنى آخر، يجب أن يحوي G واحداً على الاقل من البيانات H_1, H_2, H_3, H_4 المبينة في الشكل (5 - 7)



H_1 H_2 H_3 H_4

شكل (5 - 7)

لنفرض أن هنالك مثالاً مناقضاً (counter example) لتكهن الالوان الاربعة ، ثم نبرهن على أن هذا غير ممكن وذلك بطريقة التناقض .

ليكن T' بياناً مستوياً خالياً من اللفات مناقضاً لتكهن الالوان الاربعة وباقل عدد من الرؤوس . اذا لم يكن T' أعظمياً . نضيف اليه بعض الحافات . بدون اضافة رؤوس ، بحيث يصبح أعظمياً . اي كل أوجهه مثلثيه . لنرمز لهذا البيان الناتج بـ T . واضح من هذا الافتراض أن : كل بيان مستو الذي عدد رؤوسه اقل من عدد رؤوس T قابل التلوين 4 ـ للرؤوس . ولكن T نفسه ليس كذلك .

اذا إحتوى T على H_1 أو H_2 كبيان جزئي ، فان إزالة v من T . مع كل الحافات الواقعة عليه ، تنتج بياناً مستوياً T'' عدد رؤوسه أقل من عدد رؤوس T ، وبذلك يمكن تلوين رؤوس T'' باربعة الوان . ولما كان الرأس v بدرجة لاتزيد على 3 ، فيمكن تلوين الرأس v بلون يختلف عن الوان الرؤوس المجاورة له ، وهكذا نحصل على تلوين لرؤوس T باربعة الوان ، وهذا يناقض افتراض كون T غير قابل التلوين - 4 للرؤوس . هذا التناقض يثبت عدم امكانية احتواء T على H_1 أو H_2 كبيان جزئي .

اذا احتوى T على H_3 كبيان جزئي ، فاننا نتبع طريقة مماثلة . فنزيل الرأس v من T مع الحافات الواقعة عليه . ونرمز للبيان الناتج T'' . لما لما كان عدد رؤوس T'' أقل من عدد رؤوس T ، فان T'' قابل التلوين - 4 للرؤوس . اذا لم تكن الوان الرؤوس u_1, u_2, u_3, u_4 (انظر الشكل (5 - 7) مختلفة . فانه يتوفر لدينا لون من الالوان الاربعة نعطيه الى v . وبذلك يصبح T قابلُ التلوين - 4 للرؤوس . اما اذا كانت الوان الرؤوس u_1, u_2, u_3, u_4 مختلفة . ولتكن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ على الترتيب . فاننا نفرض أن H_{13} هو البيان الجزئي من T'' المكون من الرؤوس الملونة بـ α_1 او α_3 مع الحافات التي تصل رأساً لونه α_1 برأس لونه α_3 . وبالمثل . نعرف H_{24} . اذا لم يكن هنالك درب في H_{13} بين u_1 و u_3 . فانه يمكننا اعادة تلوين الرؤوس في المركبة التي تحتوي على u_1 بتبادل اللونين α_1 و α_3 كل محل الآخر . وعند ذلك يصبح الراس u_1 باللون α_3 وفي هذه الحالة يتوفر لدينا اللون α_1 الذي نعطيه للرأس v . وبالمثل . اذا لم يكن هنالك درب في H_{24} بين الرأسين u_2 و u_4 . فيمكننا اعادة التلوين بحيث يتوفر لدينا (α_2) نعطيه للرأس v

اما اذا كان هنالك درب بين u_2 و u_4 في H_{24} . وبنفس الوقت يوجد درب في H_{13} بين u_1 و u_3 . فيجب ان يشترك الدربان برأس w . لان T'' مستوٍ. ولكن هذا غير ممكن لانه سوف يصبح للرأس w لونان مختلفان . وهكذا . في كل هذه الحالات . يمكننا تلوين رؤوس T بما لايزيد على اربعة الوان . وهو ماينافض فرضنا . عليه . لايمكن ان يحتوي T على H_3 كبيان جزئي .

لاثبات عدم احتواء T على H_4 كبيان جزئي ، استخدم كمبي نفس الطريقة التي إتبعها عندما افترض وجود H_3 في T ، وهنا وقع في الخطأ . ولو أنه تمكن من إثبات هذا الجزء بدون خطأ ، لتم له برهان التحزر باثبات عدم وجود هكذا بيان T .

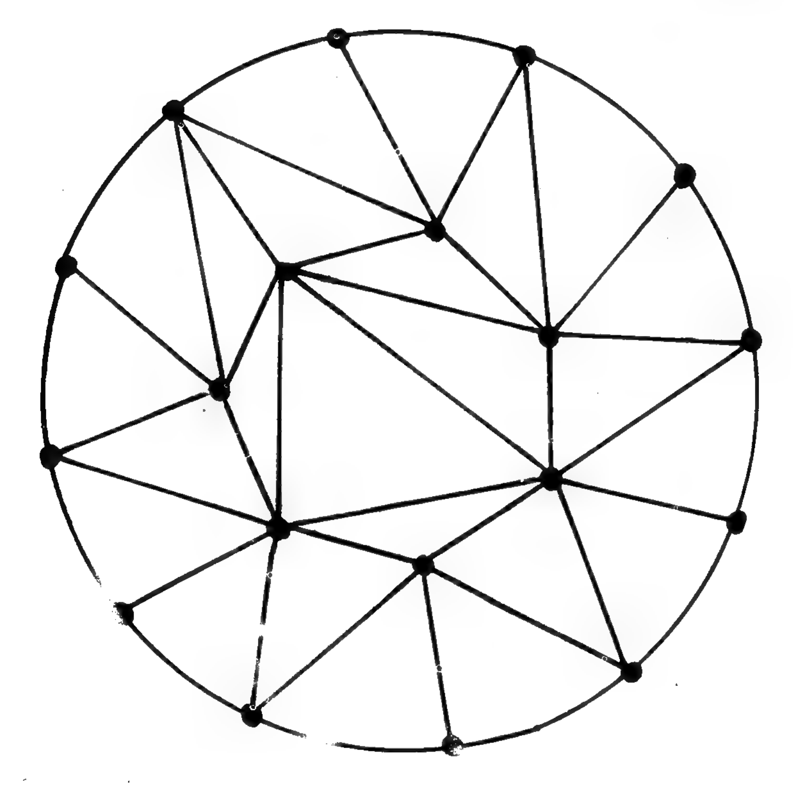
ومع أن هنالك خطأ في برهان كمبي ، فان تعديلاً بسيطاً على طريقته أدى الى برهان مبرهنة الالوان الخمسة . كما أن طريقته هذه كوّنت الاساس لكثير من الاعمال والنتائج المتفرعة عن مسألة الالوان الأربعة .

اذا أمعنا في النظر الى طريقة كمبي لوجدنا أنها تتكون باختصار من خطوتين :
(أ) إيجاد مجموعة U من بيانات [يطلق عليها لاتجنبية (unavoidable)] بحيث ان كل بيانٍ مستوٍ أعظمي يحتوي على واحد منها على الاقل كبيان جزئي .
(ب) اثبات ان كل بيان في U قابل للاختزال (reducible) ، أي لايمكن ان يكون موجوداً كبيان جزئي في أصغر مثال مناقض للتحزر . [اي أنه اذا وجد مثال مناقض يحتوي على أي من البيانات اللاتجنبية ، فيمكن اختزاله الى مثال مناقض أصغر منه – من ناحية عدد الرؤوس .]

لقد كانت المجموعة U التي اوجدها كمبي تتكون من أربعة بيانات فقط ، وهي المبينة في الشكل (5 – 7) ، ولكنه لم يستطع أن يبرهن على ان البيان H_4 قابل للاختزال ، ولذلك فان محاولته هذه لم تؤد الى البرهان الصحيح .

نجح أبيل وهيكن في اتباع طريقة مماثلة لطريقة كمبي ولكن بايجاد مجموعة U من بيانات لاتجنبية تتكون من 1939 بياناً .(لقد أُثبت مؤخراً انه يمكن اختصارها الى ما يقرب من 1400 بيان) .
البرهان على ان كلاً من هذه البيانات اللاتجنبية قابل للاختزال يتضمن جهداً كبيراً جداً أُنجز باستعمال الحاسبة الالكترونية .ولو لم تكن الحاسبة الالكترونية المتوفرة حالياً ذات كفاءة كافية لتقبل هذه البيانات ، لما امكن حل المسألة .ان كلاً من البيانات اللاتجنبية التي عالجها أبيل وهيكن كان محدوداً بتخم يتكون من 14 رأساً أو أقل ، أحد هذه البيانات مبين في الشكل (5 – 8) .

كما سبق ان ذكرنا ، فان برهان أبيل وهيكن يتكون من الخطوتين الاساسيتين (ا) و (ب) .كل من هاتين الخطوتين مباشرةبحدذاتها،ولكنالتداخل بينهما معقد، وقد عمل أبيل وهيكن عملاً كبيراً نوعياً وكمياً لاجل التغلب على هذه الصعوبة .ولكن ، مما يؤسف له ان برهانهما مطول جداً ، ولذلك يصعب التحقق منه ، كما أنه لايعطينا تفسيراً واضحاً عن سبب كون النتيجة صحيحة .هذه ، في حقيقة الامر لاتحط من روعة ما حققه أبيل وهيكن باثباتهما مبرهنة الالوان الاربعة .



شكل (5 - 8)

تمارين (5 – 3)

(1) استخدم ما لايزيد عن أربعة الوان لتلوين رؤوس البيان في الشكل (5 - 8)

(2) اثبت انه يمكن تجزئة مجموعة رؤوس أي بيان مستوٍ الى أربعة مجموعات

جزئية غير خالية ومستقلة .

(3) اذا علمت ان عدد تلوين رؤوس بيان G لايقل عن 5 ، فاثبت ان G يحتوي على بيان جزئي يكافيء توبولوجياً K_5 او $K_{3,3}$.

(5 – 4) تلوين الحافات :

لقد كانت الغاية من دراسة تلوين الحافات الوصول الى حل غير مباشر لمسألة الالوان الاربعة ، كما سوف نلاحظ ذلك في مبرهنة تيت (P. Tait) ، التي تنص على تكافؤ تكهن الالوان الاربعة مع تكهن بخصوص تلوين الحافات للخرائط التكعيبية بما لايزيد على ثلاثة الوان .

سنفترض في هذا البند أن البيانات التي سنعالجها لاتحتوي على لفات . بصورة عامة ، يمكن ان تحتوي هذه البيانات على حافات مضاعفة .

يقصد بتلوين الحافات لبيان G تعيين الوان لحافات G بحيث أن كل حافتين متجاورتين لهما لونان مختلفان . ويقال أن G قابل التلوين – k للحافات اذا امكن تلوين حافاته بما لايزيد على k من الالوان المختلفة . واذا كان $\overline{G}$ قابل التلوين – k للحافات ولكنه ليس قابل التلوين – $(k-1)$ للحافات ، فيقال ان عدد تلوين حافاته G هو k ، ونرمز لهذا العدد بالرمز $\varepsilon(G)$.

واضح أنه اذا كان G قابل التلوين – k للحافات ، فانه يمكن تجزئة مجموعة حافات G الى k من المجموعات الجزئية غير الخالية والمستقلة (اي أن حافاتها غير متجاورة بعضها مع بعض) .

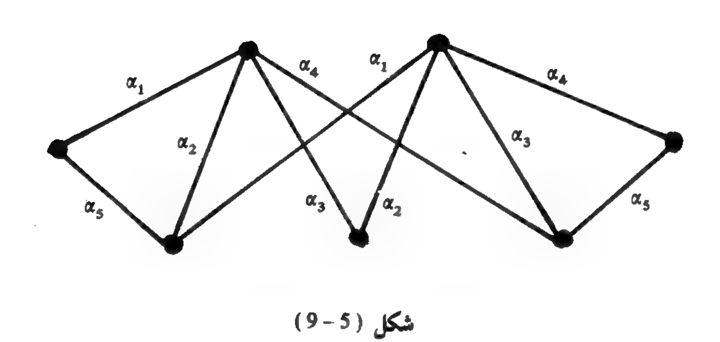
لقد أُعطي في الشكل (5 – 9) بيان G قابل التلوين – 5 للحافات ، ويمكن للقارىء أن يبين أن $\varepsilon(G) = 4$ ، وقد رُمز للالوان بـ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.
واضح أن لكل رأس في البيان G ،

$$\varepsilon(G) \geqq \rho(v).$$

وبذلك ، فان

$$\varepsilon(G) \geqq p, \qquad \ldots (1-5)$$

حيث أن p هي الدرجة العليا لرؤوس G ·



شكل (5 – 9)

المبرهنتان الاتيتان تزودانا بعددي تلوين حافات البيانين k_n ، $K_{m,n}$

مبرهنة (5 – 9) : عدد تلوين حافات البيان التام K_n هو

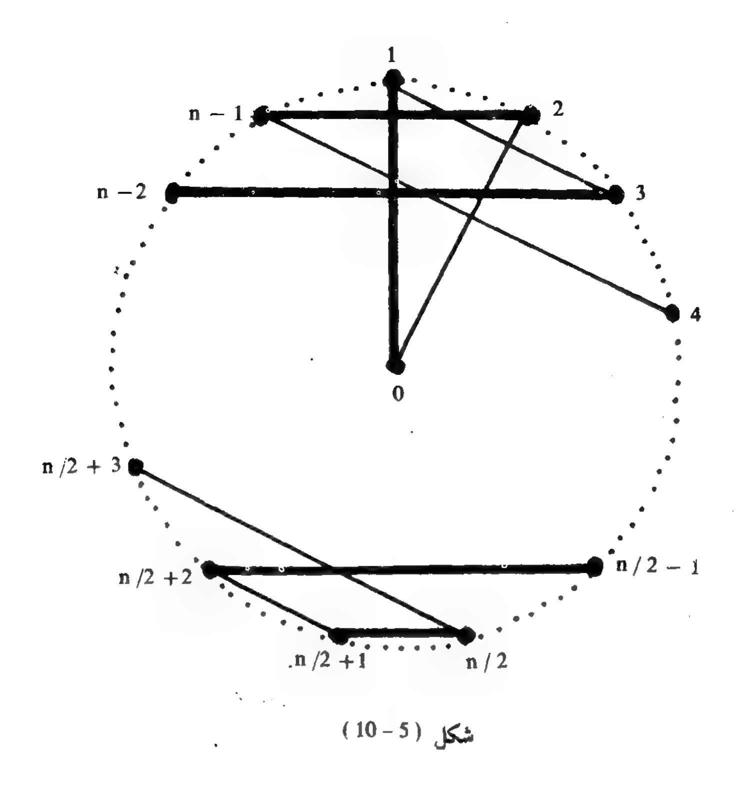
$$\varepsilon(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{عندما يكون n زوجياً} \\ n, & \text{عندما يكون n فردياً} \end{cases}$$

البرهان :

(أ) ليكن n عدداً زوجياً . أرمز لرؤوس K_n بالاعداد $0, 1, 2, \ldots, n-1$ وضعها مرتبة كما في الشكل (5 – 10) بحيث أن البعد بين كل رأسين متتابعين على الدائرة ثابت . سنرمز للحافة التي تصل الرأس i بالرأس j بالزوج غير المرتب $[i, j]$.

نعطي اللون الاول ، α_1 ، للحافات

$$[0,1], [2, n-1], [3, n-2], \ldots, [\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1],$$



شكل (5 – 10)

وهي المرسومة بالخطوط السميكة في الشكل (5 – 10) ، وهذه تشكل المجموعة الجزئية المستقلة الاولى .

نضيف (بمعيار n − 1) العدد 1 الى كل من أرقام الرؤوس ، ماعدا الصفر ، في المجموعة الجزئية المستقلة الاولى ، فنحصل على المجموعة الجزئية المستقلة الثانية ، وهي :

$$[\,0,2\,],\ [\,3,1\,],\ [\,4,n-1\,],\ \ldots,\ [\,\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2\,],$$

وهي المرسومة بالخطوط الرفيعة في الشكل (5 – 10) ، ونعطي لهذه الحافات اللون α_2 واضح أننا نحصل على هذه الحافات من تدوير الحافات في المجموعة الجزئية الاولى حول الدائرة باتجاه حركة عقرب الساعة بزاوية مقدارها $2\pi/(n-1)$.

وهكذا ، من المجموعة الجزئية المستقلة الثانية نحصل على المجموعة الجزئية المستقلة الثالثة ، ونستمر في هذه العملية $(n-1)$ من المرات ، حتى نحصل على $(n-1)$ من المجموعات الجزئية المستقلة ، وفي كل منها $n/2$ من الحافات . وفي كل مرة ، يعين لون جديد لكل من الحافات في المجموعة الجزئية المستقلة التي تم الحصول عليها في تلك الخطوة . واضح أنه لاتوجد حافات لونت مرتين ، والسبب هو أن الحافات في كل مجموعة جزئية مستقلة تصنع زاوية مع الافق تختلف عن الزاوية التي تصنعها الحافات في مجموعة جزئية مستقلة اخرى . ولما كان عدد حافات K_n هو $n(n-1)/2$ ، فان كل حافة في k_n أعطيت لوناً واحداً فقط . وبذلك ، فان

$$\varepsilon(K_n) \leqq n-1 .$$

وبما ان درجة كل رأس في K_n هو $(n-1)$ ، فانه بموجب $(5-1)$ ينتج ان

$$\varepsilon(K_n) = n-1 .$$

(ب) ليكن n عدداً فردياً .بموجب فرع (أ)

$$\varepsilon(K_{n+1}) = n.$$

وبازالة رأس ما مع كافة الحافات الواقعة عليه من K_{n+1} . نحصل على K_n وبذلك . فانه بموجب $(5-1)$

$$n-1 \leqq \varepsilon(K_n) \leqq n .$$

ولكن . عدد الحافات في اية مجموعة جزئية مستقلة للبيان K_n لايزيد على $(n-1)/2$ عندما يكون n فردياً .لذلك . لايمكن ان يكون عدد تلوين الحافات $(n-1)$. والا أصبح عدد حافاته K_n لايزيد على $(n-1)^2/2$. اذاً

$$\varepsilon(K_n) = n .$$

وبهذا يتم البرهان .

لاجل ان نستعرض عدد تلوين حا فات بيان ثنائي التجزئة . نحتاج الى شرح سريع لموضوع التزاوج(اوالتوافق)التام (the complete matching).

سنرمز للبيان الثنائي التجزئة الذي مجموعتا رؤوسه المستقلتان هما V_1 و V_2 بالرمز $G(V_1, V_2)$

يعرف التزاوج التام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ بأنه تباين متقابل بين V_1 ومجموعة جزئية من V_2 بحيث ان الرؤوس المتقابلة متجاورة .واضح ان وجود تزاوج تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ يعني وجود مجموعـة مستقلة من حافات $G(V_1, V_2)$ بحيث ان كل رأس في V_1 واقع على واحدة فقط من تلك الحافات في المجموعة المستقلة .بطبيعة الامر ، ان وجود تزاوج تام من V_1 الى V_2 يعني ان $|V_1| \leqq |V_2|$ ، أي ان عدد رؤوس V_1 لايزيد على عدد رؤوس V_2 .

مبرهنة(5 – 10): يوجد تزاوج تام من V_1 الى V_2 في البيان الثنائي التجزئة البسيط $G(V_1, V_2)$ اذا واذا فقط

$$|A| \leqq |\phi(A)|,$$

لكل مجموعة جزئية A من V_1 ، حيث أن $\phi(A)$ مجموعة كل الرؤوس في V_2 التي يكون كل منها متجاور مع رأس واحد على الاقل من الرؤوس في A .

البرهان :

واضح أن برهان الجزء الضروري مباشر . فاذا وجد تزاوج تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1, V_2)$ ، فان $|A| \leqq |\phi(A)|$ لكل $A \subseteq V_1$ ، وذلك من تعريف التزاوج التام .

والان نبرهن على أن الشرط كافٍ وذلك باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي على عدد رؤوس V_1 . لنفرض أن $|V_1| = n_1$. المبرهنة صحيحة عندما $n_1 = 1$. نفرض أن الشرط كافٍ عندما يكون عدد رؤوس V_1 أقل من n_1 .ونبرهن على أنه كذلك عندما يكون عدد رؤوس V_1 هو n_1 . لأجل إثبات ذلك نلاحظ الحالتين الآتيتين :

(أ) عندما $|\phi(A)| \geqq k + 1$ لكل مجموعة جزئية A مكونة من k من عناصر V_1 ، حيث أن $1 \leqq k < n_1$. في هذه الحالة نأخذ أي رأس u_1 من V_1 مع أي رأس مجاور له u_2 من V_2 . البيان الثنائي التجزئة $G(V_1', V_2')$ الناتج من $G(V_1, V_2)$ بازالة u_1 و u_2 مع كل الحافات الواقعة عليهما . يحقق شرط المبرهنة . لذلك . بموجب فرض الاستقراء الرياضي . يوجد تزاوج تام من V_1' الى V_2' في $G(V_1', V_2')$ الذي

يؤدي الى تزاوج تام من V_1 الى V_2 في $G(V_1,V_2)$ بعد إضافة التقابل $u_1 \leftrightarrow u_2$ اليه.

(ب) عندما توجد مجموعة جزئية A مكونة من k (حيث أن $k < n_1$) من عناصر V_1 بحيث أن $|\phi(A)| = k$. عندئذ ، يمكننا ايجاد تقابل متباين بين A و $\phi(A)$ بحيث أن كل رأس في A يقابل رأساً في $\phi(A)$ متجاوراً معه ، وذلك بموجب فرض الاستقراء الرياضي . ليكن $G(V_1'', V_2'')$ البيان الثنائي التجزئة الناتج من $G(V_1,V_2)$ بازالة الرؤوس في كل من A و$\phi(A)$ مع كافة الحافات الواقعة عليها ، علماً أن $V_1''=V_1-A$ ، $V_2''=V_2-\phi(A)$. اذا كانت B أية مجموعة جزئية مكونة من h من عناصر V_1'' ، فان في البيان $G(V_1'',V_2'')$ يكون $|B| \leqq |\phi(B)|$. لان خلاف ذلك يؤدي الى

$$|A \cup B| = h + k > |\phi(A)| + |\phi(B)| \geqq |\phi(A) \cup \phi(B)|$$

$$\geqq |\phi(A \cup B)|.$$

وهو يناقض شرط المبرهنة المفروض صحيحاً في $G(V_1,V_2)$. وعليه . فان شرط المبرهنة يصح على البيان الثنائي التجزئة $G(V_1'',V_2'')$. ولما كان عدد عناصر V_1'' هو $n_1 - k$، أي أقل من n_1 . فانه بموجب فرض الاستقراء الرياضي . يوجد تزاوج تام من V_1'' الى V_2'' في $G(V_1'',V_2'')$: هذا التقابل المتباين مع التقابل المتباين من A الى $\phi(A)$ الذي سبق ذكره . ينتجان تزاوجاً تاماً من V_1 الى V_2 في $G(V_1,V_2)$ وبهذا يتم البرهان .∎

يطلق على المبرهنة (5 - 10) «مبرهنة هول للزواج» (Hall's marriage theorem) وسنذكر في الفصلين السادس والسابع بعض استعمالات هذه المبرهنة في مواضيع اخرى في نظرية البيانات .

نتيجة (5 - 2): اذا كان البيان الثنائي التجزئة $G(V_1,V_2)$ بسيطاً ومنتظماً بدرجة h . وأن $|V_1| = |V_2| = n$. فانه توجد في $G(V_1,V_2)$ مجموعة مكونة من n من الحافات المستقلة . في حقيقة الامر . كل رأس في $G(V_1,V_2)$ واقع على واحدة فقط من هذه الحافات المستقلة .

البرهان : لما كان $G(V_1,V_2)$ منتظماً بدرجة h ، فان لكل مجموعة جزئية A من رؤوس V_1 ، يكون مجموع درجات رؤوس A هو $h|A|$. اذا كانت $\phi(A)$ مجموعة الرؤوس في V_2 التي كل منها متجاور مع رأس واحد على الاقل من رؤوس A ، فان

$$|\phi(A)| \geqq h|A|/h = |A|,$$

لان درجي كل رأس هي h . وعليه ، فان $G(V_1,V_2)$ يحقق شرط المبرهنة(5-10) ، وبذلك يوجد تزاوج تام ، أي توجد مجموعة مكونة من n من الحافات المستقلة.

نتيجة(5 - 3): اذا كان $G(V_1,V_2)$ بياناً ثنائي التجزئة ، وان p هي الدرجة العليا لرؤوسه ، فان هنالك مجموعة مستقلة من حافات $G(V_1,V_2)$ بحيث أن كل رأس بدرجة p يقع على واحدة من هذه الحافات .

البرهان مباشر ونتركه للطالب كتمرين .

نحن الآن مهيؤون لاثبات المبرهنة الآتية وهي التي تخص تلوين حافات البيانات الثنائية التجزئة .

مبرهنة(5 - 11): اذا كان البيان الثنائي التجزئة G بسيطاً . وكانت p الدرجة العليا لرؤوسه ، فان

$$\varepsilon(G) = p.$$

البرهان : نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي على m ، عدد حافات G .

واضح أن المبرهنة صحيحة اذا كان $m = 1$. ولنفرض انها صحيحة لكل بيان ثنائي التجزئة الذي عدد حافاته أقل من m . ولنأخذ البيان G الثنائي التجزئة الذي عدد رؤوسه m . بموجب النتيجة(5 - 3)، توجد مجموعة E من الحافات المستقلة بحيث أن كل رأس بدرجة p يقع على واحدة فقط من هذه الحافات المستقلة . ليكن G' البيان الثنائي التجزئة الناتج من G بازالة كل حافات E . واضح أن$(p - 1)$ هي الدرجة العليا لرؤوس G' . ولما كان عدد حافات G' هو $m - |E|$. فانه بموجب الاستقراء الرياضي .

يكون

$$\varepsilon(G') = p - 1 .$$

وباعطاء لون جديد لكل من الحافات في المجموعة المستقلة . نستنتج أن

$$\varepsilon(G) \leqq p .$$

وهكذا ، بموجب (5 – 1)، ينتج

$$\varepsilon(G) = p.$$

نتيجة 5 – 4)

$$\varepsilon(K_{m,n}) = \max\{m,n\} .$$

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة (5 – 11).

ملاحظة : المبرهنة(5 – 11)صحيحة أيضاً عندما يكون البيان الثنائي التجزئة G مضعّفاً . (انظر المصدر[2].)

المبرهنة الآتية تعطينا أدق قيدين لعدد تلوين حافات بيان كيفي .

مبرهنة(5 – 12):– (تعود الى Vizing ، سنة 1964) - اذا كان G بياناً بدون لفات ، وكانت p الدرجة العليا لرؤوس G ، فان

$$p \leqq \varepsilon(G) \leqq p + \pi , \qquad \text{..... } (2-5)$$

حيث إن

$$\pi = \max_{v,u, \varepsilon V(G)} \pi(v, u)$$

وان $\pi(v,u)$ هو عدد الحافات التي تصل الرأسين u و v .

البرهان مطول بعض الشيء ويعتمد على نتائج لم تعط في هذا الكتاب ، ويمكن للقارىء الاطلاع عليه في المصدر [11].

واضح انه اذا كان G بسيطاً ، فان $\pi = 1$ ، وعند ذلك ينتج

$$p \leqq \varepsilon(G) \leqq p + 1 . \qquad \text{...... } (3-5)$$

قبل أن يتم اثبات مبرهنة الالوان الاربعة للخرائط المستوية ، برهن المختصون في

نظرية البيانات العديد من العبارات المكافئة لمسألة الالوان الاربعة ، ومنها المبرهنة :

« تكهن الالوان الاربعة للخرائط المستوية تكون صحيحة اذا واذا فقط $\varepsilon(G) = 3$ لكل خارطة مستوية تكعيبية G . »

وبعد ان تم اثبات أن كل خارطة مستوية تكون قابلة التلوين ـ 4 للاوجه ، أصبح من غير الضروري دراسة تلك العبارات المكافئة لقضية الالوان الاربعة . ولكن ، قد يكون مفيداً أحيانا ذكر بعضها بصيغة جديدة على ضوء مبرهنة الالوان الاربعة. فمثلاً ، من المبرهنة المذكورة اعلاه نصوغ المبرهنة الاتية :

مبرهنة (5 – 13) : لكل خارطة مستوية تكعيبية ، G ، يكون $\varepsilon(G) = 3$

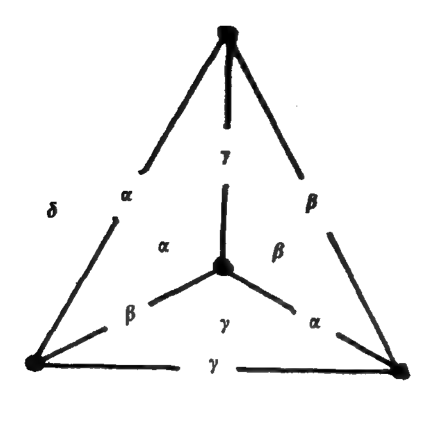
البرهان : لما كانت G خارطة مستوية ، فان G قابلة التلوين ـ 4 للاوجه . دعنا نعبر عن الالوان الاربعة للاوجة بازواج مرتبة كالاتي :

$$\alpha = (1,0),\ \beta = (0,1),\ \gamma = (1,1),\ \delta = (0,0).$$

اذا كانت e حافة مشتركة بين تخمي وجهين احدهما بلون β والاخر بلون γ ، فاننا نعطي لـ e اللون $\beta + \gamma$ (معيار 2) ، أي α . وهكذا بالنسبة لكافة حافات G . ونظراً لعدم وجود برازخ في G ، فان الالوان التي سوف تستخدم لتلوين الحافات بهذه الطريقة هي α, β, γ ، كما موضح في الجدول الاتي :

$+$	α	β	γ	δ
α	$-$	γ	β	α
β	γ	$-$	α	β
γ	β	α	$-$	γ
δ	α	β	γ	$-$

بما أن G تكعيبي ، فانه عند كل رأس توجد ثلاثة أوجه متجاورة مثنى مثنى ، وعليه كل حافتين متجاورتين تقعان سوية على تخم وجه واحد فقط [انظر الشكل (5 – 11)] وهكذا لايمكن أن تأخذ حافتان متجاورتان نفس اللون بهذه الطريقة . وبهذا يتم البرهان ■



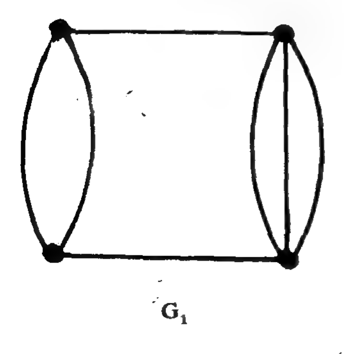
شكل (5 – 11)

تمارين (5 – 4)

(1) احسب عدد تلوين حافات البيان المعطى في الشكل (5 – 5)، وكذلك بيان بيترسن .

(2) جد عدد تلوين حافات كل من البيانين في الشكل (5 – 12) . ماذا تستنتج بالنسبة للعلاقة (5 – 2)؟

(3) في مدرسة ما، يجري امتحان شفهي في نهاية كل عام دراسي . اذا علمت ان كل صف يُمتحن من قبل مُدرّسيه . كيف يمكن برمجة الامتحانات بحيث تنتهي الامتحانات بأقل عدد من الايام ، علماً بأن كل صف لا يُمتحن في اكثر من مادة واحدة في اليوم ، كما ان كل مدرس لا يَمتحن اكثر من مادة واحدة في اليوم . [تلميح : كوّن بيانا ثنائي التجزئة وجد عدد تلوين حافاته .]



G_1

G_2

شكل (5 – 12)

(4) اثبت أن .

$$\varepsilon (G) = \chi (I (G)),$$

حيث ان $I(G)$ هو بيان المناقلة للبيان G .

(5) جد كل البيانات التي عدد تلوين حافاتها هو 2 .

(6) ليكن G أي بيان نحصل عليه من K_{2n+1} بازالة مالايزيد على($n - 1$) من الحافات ، اثبت ان

$$\varepsilon (G) = 2n + 1 .$$

(7) برهن النتيجة (5 - 3). [تلميح : اثبت ان هنالك بيانا ثنائي التجزئة بسيطا منتظماً بدرجة p ويحتوي على($G (V_1,V_2)$ كبيان جزئي .]

(8) يقال لبيان مُضاعف G انه حلقة (ring) اذا كانت عملية ابدال كل حافة مضاعفة بحافة بسيطة واحدة فقط تختزل G الى دارة بسيطة . ويقال للحلقة انها زوجية (فردية) اذا كان طول الدارة البسيطة التي تُختزل اليها الحلقة زوجيا (فرديا). اذا كانت p الدرجة العليا لرؤوس حلقة R ، فاثبت ان $\varepsilon (R) = p$ لكل حلقة زوجية R .

(9) ليكن G بيانا مضاعفا بدون لفات ، الدرجة العليا لرؤوسه هي 3 . اثبت ان $\varepsilon (G)$ هو 3 أو 4 .

(5 - 5) حدوديات التلوين

سبق ان درسنا في البنود السابقة ثلاثة أنواع من تلوينات البيانات ، وكنا نبحث عن تلوين لبيان بعدد معين من الالوان . وقد يكون من الطبيعي ان ندرس عدد الطرق لتلوين بيان مابعدد معين من الالوان . وسوف نركز في هذا البند على تلوين الرؤوس فقط ، ولهذا فسوف نفترض أن البيانات موضوعة هذه الدراسة هي بيانات بسيطة موسومة .

لقد دُرست حدوديات التلوين لاول مرة من قبل بيركوف (G. Birkhoff) سنة 1912 في محاولة للوصول الى حل لتكهن الالوان الاربعة .

ليكن G بياناً بسيطاً موسوماً .يقال لتلوينين c_1 و c_2 لرؤوس G بـ λ من الالوان انهما مختلفان اذا وجد في G رأس موسوم أُعطي لون في التلوين c_1 يختلف عما أعطي

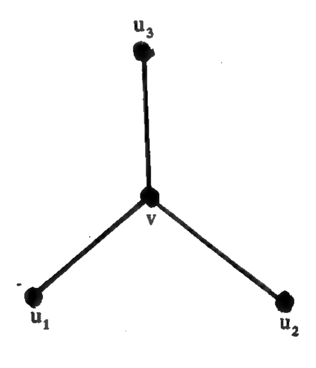
له في التلوين c_2

نعرف دالة تلوين بيان G ، التي نرمز لها $P(G;\lambda)$ ، بانها عدد التلوينات المختلفة لرؤوس G بـ λ من الالوان. طبيعي ان في كل تلوين للرؤوس ، أي رأسين متجاورين يلونان بلونين مختلفين ،كما سبق ان شرحناه في البند(5 – 1) .

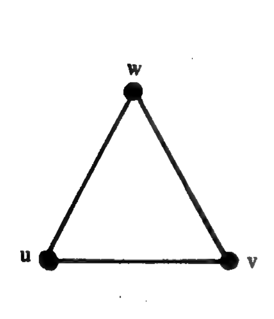
واضح أن $P(G;\lambda)=0$ اذا كان $\chi(G)>\lambda$ ؛ كما أن $\chi(G)$ هو أصغر قيمة صحيحة موجبة لـ λ بحيث ان $P(G;\lambda)>0$. وعليه ، فان مبرهنة الالوان الاربعة تؤكد أن $P(G;4)>0$ لكل بيان مستوٍ G خالٍ من اللفات .

ولاجل توضيح مفهوم دالة التلوين ، نأمل البيان التام K_3 الموسوم والمبين في الشكل (5 – 13) . يمكن تلوين الرأس u بأي من الالوان λ . وعندما يعين لون لـ u ، يمكننا تلوين الرأس v باي من الالوان الباقية التي عددها $(\lambda-1)$. وهكذا يمكن تلوين الرأس w بأي من الالوان $(\lambda-2)$. وعلين ، يمكن تلوين رؤوس K_3 بـ $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ من التلوينات المختلفة . أي أن

$$P(K_3;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2).$$



شكل (5 – 14)



شكل (5 – 13)

باتباع نفس الطريقة التي استخدمت لايجاد $P(K_3;\lambda)$ نحصل على

$$P(K_n;\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1).$$

اذا كان $\bar{K}_n$ البيان المكون من n من الرؤوس المنعزلة ، فان كل رأس يلون بأي من الالوان التي عددها λ ، ولذلك فان

$$P(\bar{K}_n ; \lambda) = \lambda^n.$$

ومثال توضيحي آخر ، تأمل الشجرة T المبينة في الشكل(5 – 14)، تجد أنه يمكن تلوين الرأس v بأي من الالوان التي عددها λ ؛ وبعدها يمكن تلوين أي من الرؤوس الثلاثة الاخرى بأي من الالوان الباقية التي عددها($\lambda - 1$). وعليه ، فان عدد التلوينات المختلفة لهذه الشجرة هو

$$P(T ; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3 .$$

في حقيقة الامر ، هذه هي صيغة عامة لكل الاشجار ، كما مبين في المبرهنة الأتية.

مبرهنة(5 – 14) : اذا كانت T شجرة عدد رؤوسها n ، فان

$$P(T ; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس n. واضح أن المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد الرؤوس 1 أو 2. لنفرض انها صحيحة لكل الاشجار التي عدد رؤوسها أقل من n ، ونأخذ T التي عدد رؤوسها n. معروف أن T تحتوي على رأس ، u ، درجته 1. لتكن T′ الشجرة الناتجة من T بازالة u مع الحافة الواقعة عليه. بموجب فرض الاستقراء الرياضي

$$P(T' ; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-2}$$

لكل تلوين لرؤوس T′ ، يمكن تلوين الرأس u بـ($\lambda - 1$)من التلوينات المختلفة ، لانu متجاور مع رأس واحد فقط من رؤوس T′. لذلك ، فان

$$P(T ; \lambda) = (\lambda - 1) . P(T' ; \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1} .$$

وبهذا يتم البرهان. ∎

مما تقدم من شرح ومن المبرهنة(5 – 14)، نلاحظ أن دالة تلوين البيان التام K_n ، ولاي شجرة ، هي حدودية من الدرجة n بـ λ ؛ وهذا ماسنبرهنه بصورة عامة على كل بيان G. ولكن قبل هذا ، نبدأ بالمبرهنة المساعدة الآتية.

مبرهنة(5 – 15) : ليكن G بياناً بسيطاً فيه الرأسان u و v غيرمتجاورين. ليكن G_1 البيان الناتج من G بوصل u و v بحافة ، وليكن G_2 البيان الناتج من G بتطابق الرأسين u و v ، مع ابدال كل حافة مضاعفة ناتجة بحافة بسيطة. عندئذ

$$P(G ; \lambda) = P(G_1 ; \lambda) + P(G_2 : \lambda).$$

البرهان : في أي تلوين مقبول لرؤوس G ، إما أن يكون الرأسان u و v بنفس اللون

أويكونان بلونين مختلفين . عدد التلوينات المختلفة لـ G التي فيها الرأسان u و v بلونين مختلفين هو نفس عدد التلوينات للبيان G_1 . كما أن عدد التلوينات المختلفة لـ G التي فيها الرأسان u و v بنفس اللون هو نفس عدد التلوينات لـ G_2 . وبهذا يتم البرهان.

يمكن تطبيق هذه المبرهنة على أي بيان G غير تام ، فنحصل منه على بيانين G_1 و G_2 بحيث أن دالة تلوين البيان G تساوي مجموع دالتي تلوين G_1 و G_2 . فاذا كان G_1 أو G_2 غير تام ، نعيد تطبيق المبرهنة مرة أخرى على G_1 أو G_2 . وهكذا نستمر حتى نحصل في الاخير على بيانات تامة مجموع دوال التلوين لها يساوي دالة تلوين البيان G. ولما كانت دالة التلوين لأي بيان تام ، K_r ، هي حدودية بدرجة r ، فان $P(G;\lambda)$ هي حدودية . وهكذا نحصل على النتيجة الآتية .

نتيجة (5 – 5) : دالة التلوين ، $P(G;\lambda)$ ، لبيان G هي حدودية بـ λ .

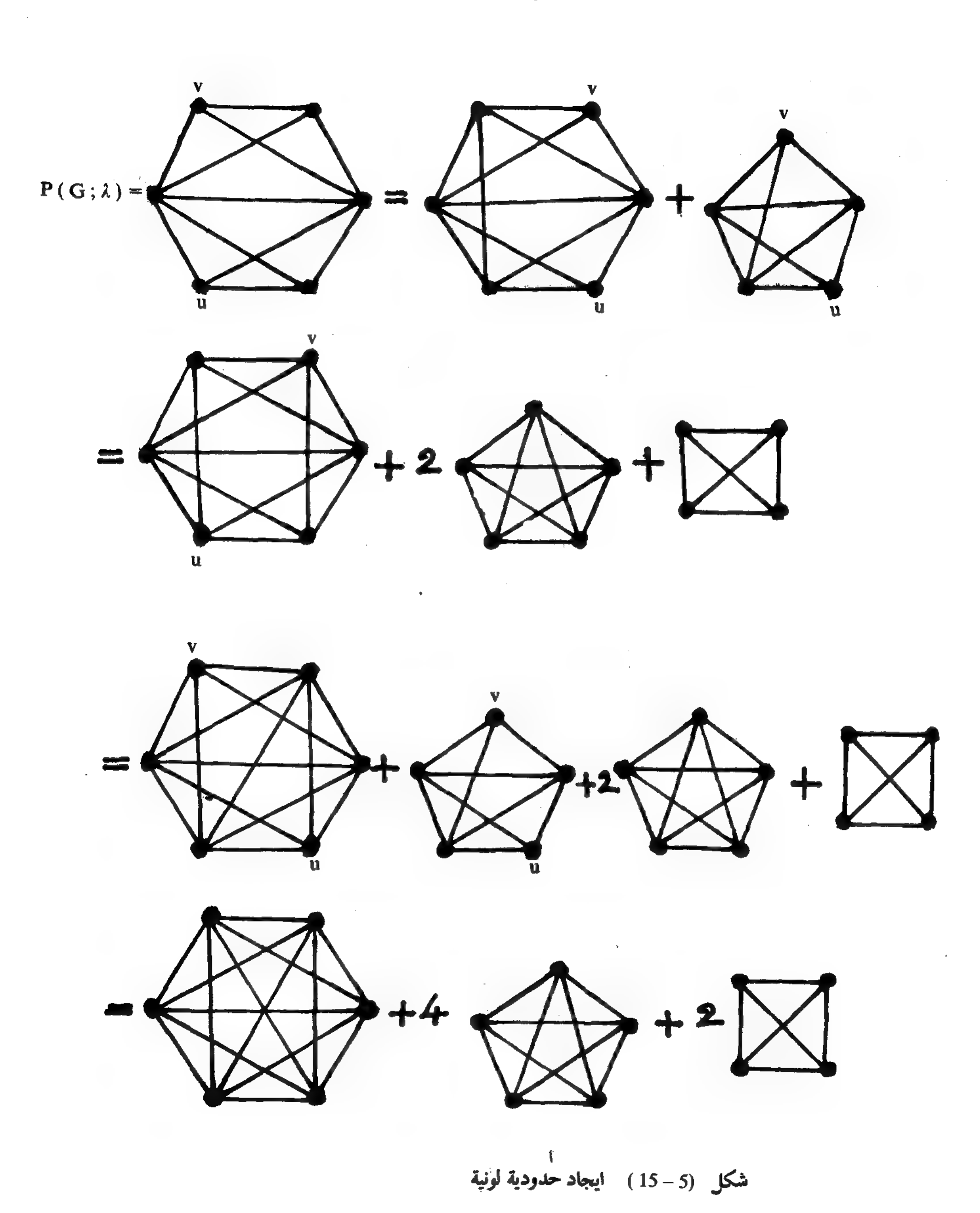
وبناء على ذلك ، سنطلق على $P(G;\lambda)$ حدودية تلوين البيان G.

ولاجل توضيح كيفية إستعمال المبرهنة (5 – 15) لايجاد $P(G;\lambda)$ لبيان معلوم G، نتبع وسيلة زيكوف (Zykov) التي يستعمل فيها البيان كممثل لحدودية التلوين له بـ λ من الالوان . سنؤشر على الرأسين غير المتجاورين المعينين في كل خطوة بـ u و v. ولقد ذكرنا في الشكل (5 – 15) خطوات ايجاد حدودية تلوين البيان G بدلالة حدوديات تلوين بيانات تامة . ومنها نحصل على

$$
\begin{aligned}
P(G;\lambda) &= P(K_6;\lambda) + 4P(K_5;\lambda) + 2P(K_4;\lambda) \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)[(\lambda-4)(\lambda-5) + 4(\lambda-4) + 2] \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda^2-5\lambda+6) \\
&= \lambda^6 - 11\lambda^5 + 47\lambda^4 - 97\lambda^3 + 96\lambda^2 - 36\lambda .
\end{aligned}
$$

لاحظ أن هذا البيان G هو بيان مستوٍ يحتوي على K_4 كبيان جزئي ، لذلك فان $\chi(G) = 4$ ويتفق هذا مع الناتج الذي نحصل عليه من $P(G,\lambda)$ عندما نعوض $\lambda = 4$، حيث نجد أن $P(G;4) = 48$.

وبذلك ، فان هنالك 48 طريقة مختلفة لتلوين رؤوس G بأربعة الوان .



شكل (5 – 15) ايجاد حدودية لونية

لحدوديات التلوين خواص عديدة ، بعض منها بسيط وينتج مباشرة من المبرهنة (5 - 15) . المبرهنة الآتية تتضمن بعض هذه الخواص .

مبرهنة (5 - 16) : اذا كان G بيانا بسيطا عدد رؤوسه n ، وعدد حافاته m ، ويتكون من المركبات $G_1, G_2, \ldots, G_k$. فان حدودية التلوين $P(G;\lambda)$ تحقق الخواص التالية

(أ) درجة $P(G;\lambda)$ هي n

(ب) معامل λ^n هو 1

(ج) معامل λ^0 هو صفر ؛

(د) معامل λ^{n-1} هو $-m$ ؛

(هـ)

$$P(G;\lambda) = P(G_1;\lambda).P(G_2;\lambda)\ldots P(G_k;\lambda)$$

البرهان : في برهان المبرهنة (5 - 15) لاحظنا انه يمكننا كتابة $P(G;\lambda)$ كمجموع حدوديات تلوين بيانات تامة عدد رؤوس كل منها لايزيد على n . وان أحدها هو K_n الذي يظهر في ذلك المجموع مرة واحدة فقط .
من ذلك نستنتج صحة الخواص (أ) و (ب) و (ج) .
لاثبات الخاصية (د) نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على m .
فاذا كان $m = 1$. فان

$$P(G;\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - 1).$$

وبذلك يكون معامل λ^{n-1} مساويا لـ -1.

والآن نفرض ان هذه الخاصية صحيحة لكل بيان G عدد حافاته لايزيد على $(m - 1)$ لتكن $[u,v]$ حافة في البيان G الذي عدد حافاته m . وليكن G' البيان الناتج من G بازالة الحافة $[u,v]$ وليكن G'' البيان الناتج من G بتطابق الرأسين u و v . عندئذ نحصل . بموجب المبرهنة (5 - 15) . على

$$P(G;\lambda) = P(G';\lambda) - P(G'';\lambda).$$

بما أن عدد حافات G' هو $m-1$ وعدد رؤوسه هو n ، فانه بموجب فرض الاستقراء الرياضي ، يكون معامل λ^{n-1} في الحدودية $P(G';\lambda)$ مساويا لـ $-(m-1)$ ؛ وبما أن عدد رؤوس G'' هو $(n-1)$، فان معامل λ^{n-1} في الحدودية $P(G'';\lambda)$ هو 1 [بموجب الخاصية (ب)] . اذاً ، معامل λ^{n-1} في الحدودية $P(G;\lambda)$ هو $(-m)$. وهكذا ، تكون الخاصية (د) صحيحة دائما .

واضح ان كل مركبة من مركبات G يمكن تلوينها بانفصال عن المركبات الاخرى ، ولهذا فان عدد طرق تلوين G يساوي حاصل ضرب اعداد طرق تلوين المركبات $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ، وبهذا ، فان الخاصية (هـ) صحيحة ايضا .

المبرهنة الآتية تعطينا خاصية أخرى لمعاملات حدوديات التلوين .

مبرهنة (5 – 17) : معاملات حدود $P(G;\lambda)$ تكون غير سالبة وغير موجبة بالتناوب .

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على كل من عدد الرؤوس وعدد الحافات . فاذا كان عدد الرؤوس 1 ، فان $P(G;\lambda) = \lambda$. واذا كان عدد الرؤوس 2 . فان $P(G;\lambda) = \lambda^2$ عندما يكون عدد الحافات صفراً ، و $P(G;\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ عندما يكون عدد الحافات 1 . وهكذا فان المبرهنة صحيحة اذا كان عدد الرؤوس 1 أو 2. ولنفرض أنها صحيحة لكل البيانات التي عدد رؤوسها أقل من n . ولنأخذ G الذي عدد رؤوسه n

واضح انه اذا كان عدد حافات G هو 1 . فان المبرهنة صحيحة . فاذا كانت المبرهنة صحيحة لكل البيانات التي عدد رؤوسها n وعدد حافاتها تقل عن m فسنبرهن على انها صحيحة أيضا لكل بيان G الذي عدد رؤوسه n وعدد حافاته m . اذا كان u و v رأسين متجاورين في G . فلنرمز بـ G' للبيان الناتج من G بازالة $[u, v]$. ونرمز بـ G'' للبيان الناتج من G بتطابق الرأسين u و v . بموجب المبرهنة (5 – 15) . يكون لدينا

$$P(G;\lambda) = P(G';\lambda) - P(G'';\lambda).$$

لما كنا قد افترضنا صحة المبرهنة لكل البيانات التي عدد رؤوسها n وعدد حافاتها اقل من m فانه توجد اعداد صحيحة غير سالبة

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ بحيث ان

$$P(G'; \lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}\lambda.$$

اضافة الى ذلك ، فقد افترضنا صحة المبرهنة لكل البيانات التي عدد رؤوسها أقل من n ، ولذلك توجد اعداد صحيحة غير سالبة $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$ بحيث ان

$$P(G''; \lambda) = \lambda^{n-1} - b_1\lambda^{n-2} + b_2\lambda^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2} b_{n-2}\lambda.$$

وهكذا ، نحصل على

$$P(G;\lambda) = \lambda^n - (a_1 + 1)\lambda^{n-1} + (a_2 + b_1)\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}(a_{n-1} + b_{n-2})\lambda.$$

وعليه ، فان معاملات حدود $P(G;\lambda)$ تكون غير سالبة وغير موجبة بالتناوب .

ملاحظة : لاحظ ان المبرهنتين(5 – 16)و(5 – 17)لا تعطيان وصفاً كاملاً لحدوديات التلوين . [انظر التمرين (7) من مجموعة تمارين (5 – 5)] .

المبرهنة التالية تزودنا بمعلومات أكثر عن معاملات حدوديات التلوين .

مبرهنة (5 – 18): لكل بيان متصل بسيط G ، يكون معامل λ في الحدودية $P(G;\lambda)$ غير صفري .

البرهان : نتبع طريقة الاستقراء الرياضي على عدد الرؤوس .

واضح ان المبرهنة صحيحة عندما يكون عدد الرؤوس 1 او 2. حيث ان $P(G;\lambda) = \lambda$ او $P(G;\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ على الترتيب . ولذلك نفرض أنها صحيحة لكل بيان متصل بسيط الذي عدد رؤوسه أقل من n . ونأخذ البيان المتصل البسيط G الذي عدد رؤوسه n .

اذا كان G خاليا من الدارات ، أي انه شجرة ، فعندئذ تكون المبرهنة صحيحة بموجب المبرهنة (5 – 14). وفيما عدا ذلك ، نفرض ان هنالك حافة [u, v] ليست برزخاً في G . نعرف G′ و G″ كما في المبرهنة السابقة (5 – 17) . فيكون لدينا

$$P(G;\lambda) = P(G';\lambda) - P(G'';\lambda).$$

وبموجب المبرهنة(5 – 17)، توجب اعداد صحيحة $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ و $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ غير سالبة بحيث ان

$$P(G';\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1}\lambda,$$
$$P(G'';\lambda) = \lambda^{n-1} - b_1\lambda^{n-2} + b_2\lambda^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} b_{n-2}\lambda.$$

وعليه ، فان معامل λ في الحدودية $P(G;\lambda)$ هو $(-1)^{n-1}(a_{n-1} + b_{n-2})$ ولما كان $a_{n-1} \geq 0$ ، و $b_{n-1} > 0$ بموجب فرض الاستقراء الرياضي ، فان $(a_{n-1} + b_{n-2}) > 0$ ، وبهذا يتم البرهان .

نتيجة (5 – 6): اذا كان G بياناً بسيطاً ، فان اصغر قوة لـ λ بمعامل غير صفري في حدودية التلوين $P(G;\lambda)$ ، تساوي عدد مركبات G .

ينتج البرهان مباشرة من المبرهنة (5 – 18) ومن فرع (هـ) من المبرهنة(5-16).

يمكن ان نعبر عن $P(G;\lambda)$ بصيغة أخرى باتباع الطريقة التي تعود الى بيركوف وهي التي نشرحها فيما يلي باختصار .

لنفرض أننا أعطينا الواناً للرؤوس بدون التقيد بشرط إختلاف لوني كل رأسين متجاورين ؛ واضح انه يمكن اجراء ذلك بـ λ^n من الطرق المختلفة . لنرمز بـ $\mu(e)$ لعدد التلوينات (بهذا الاسلوب) للبيان G التي فيها الحافة e تصل بين رأسين بنفس اللون . وبصورة عامة ، نرمز بـ

$$\mu(H) = \mu(e_1, e_2, \dots, e_s)$$

لعدد تلوينات G التي فيها رأسي كل من الحافات $e_1, e_2, \dots, e_s$ للبيان الجزئي H بنفس اللون .

من المباديء المعروفة في نظرية المجموعات . يكون لدينا

$$P(G;\lambda) = \lambda^n - \sum_i \mu(e_i) + \sum_{i,j} \mu(e_i, e_j) \quad \dots, \qquad \dots (4-5)$$

حيث ان المجموع الاول يشمل كل الاختيارات لحافة واحدة e_i والمجموع الثاني يشمل كل الاختيارات لحافتين مختلفتين e_i ، e_j . وهكذا .

لنفرض ان $H_1, H_2, \ldots, H_{c(H)}$ هي مركبات البيان الجزئي H الذي رؤوسه هي كل مجموعة رؤوس G عندما يكون رأسا كل حافة في H بنفس اللون ، فان كل الرؤوس في H_l ، حيث $l = 1, 2, \ldots, c(H)$ ، يجب ان تكون بنفس اللون . وعليه فان

$$\mu(H) = \lambda^{c(H)} .$$

وهكذا ، بالتعويض في (5 - 4) ، نحصل على الصيغة

$$P(G;\lambda) = \sum_{s,c} (-1)^s N(s,c)\lambda^c , \qquad \ldots (5-5)$$

حيث ان $N(s,c)$ هو عدد البيانات الجزئية H للبيان G التي عدد حافاتها s وعدد مركباتها c ، وعدد رؤوس كل H هو n . وطبيعي أن هذه الصيغة قليلة الفائدة في ايجاد $P(G;\lambda)$ لبيان معلوم G ، ولكنها تفيد في دراسة بعض خواص $P(G;\lambda)$. ولمعرفة المزيد في هذا الموضوع يمكن الاطلاع على المصدر [12] .

تمارين (5 - 5)

(1) جد حدوديات تلوين البيانات الافلاطونية [شكل (1 - 25)] .

(2) اذا كانت C_n دارة بسيطة طولها n ، فاثبت أن

$$P(C_n;\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$$

[تلميح : استعمل الاستقراء الرياضي مع المبراهنتين (5 - 14) و (5 - 15) .]

(3) اذا كان G بيانا عدد رؤوسه n وحدودية تلوينة هي

$$P(G;\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

فاثبت ان G شجرة . [تلميح : استعمل المبرهنة (5 - 16) لاثبات أن G متصل وعدد حافاته (n - 1) .]

(4) اثبت النتيجة (5 – 6) .

(5) اذا كانت v نقطة مفصل في البيان G، وكانت $H_1, H_2, \ldots, H_k$ قطع G نسبة الى v ، فاثبت أن

$$P(G;\lambda) = \lambda^{1-k} P(H_1;\lambda) . P(H_2;\lambda) \ldots P(H_k;\lambda) .$$

[تلميح : عندما يكون الرأس v باحد الالوان (التي عددها λ) يكون عدد طرق تلوين بقية رؤوس H_i بـ λ من الالوان هو $P(H_i;\lambda)/\lambda$.]

(6) ليكن e برزخاً في بيان متصل G . اذا كانت H_1 و H_2 مركبتي البيان الناتج من G بازالة e ، فاثبت ان

$$P(G;\lambda) = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) P(H_1;\lambda) . P(H_2;\lambda) .$$

[تلميح : استعمل المبرهنة (5 – 15) وتمرين (5) أعلاه .]

(7) الحدودية $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 5\lambda^2$ تحقق الخواص الواردة في المبرهنتين (5 – 16) و (5 – 17) ، اثبت انها ليست حدودية تلوين أي بيان بسيط .

(8) اثبت أن

$$P(K_{n,1}:\lambda) = P(K_1:\lambda) . (\lambda - 1)^n ;$$

$$P(K_{n,2}:\lambda) = P(K_1;\lambda) . (\lambda - 1)^n + P(K_2:\lambda)(\lambda - 2)^n$$

$$P(K_{n,3}:\lambda) = P(K_1:\lambda)(\lambda - 1)^n + 3P(K_2;\lambda)(\lambda - 2)^n + P(K_3;\lambda)(\lambda - 3)^n .$$

هل يمكن تعميم هذه للحصول على صيغة لـ $P(K_{n,m};\lambda)$ ؟

الفصل السادس

تطبيقات متنوعة لنظرية البيانات

ان دراسة نظرية البيانات بدون التعرف على بعض استخداماتها تعتبر دراسة ناقصة ولقد ذكرنا في بعض البنود التي سبق شرحها في هذا الكتاب تطبيقات متعلقة مباشرة بمواد تلك البنود .ونضيف في هذا الفصل تطبيقات اخرى غير مباشرة ، فهي تحتاج الى المزيد من مواد نظرية البيانات المتعلقة بذلك الموضوع من التطبيقات.

في حالات معينة ، يكون استخدام المفاهيم والنتائج البسيطة عن البيانات ، عندما يحسن اختيارها ، اداة فعاله واسلوباً مناسباً .تكون نظرية البيانات مفيدة في التعبير عن تلك القضايا بشكل رياضي واضح بحيث نستطيع تفسير نتائجها بدقة اكثر. هذا ، وفي مسائل اخرى ، قد نحتاج الى مفاهيم ومواضيع اكثر تعقيداً .

لقد أُخذتْ بعض نتائج ومفاهيم نظرية البيانات طريقها للتطبيق في المعامل ، كما هي الحالة في موضوع «وسيلة تقييم ومراجعة البرامج» المعروف بـ PERT

يتضمن هذا الفصل القليل من استخدامات نظرية البيانات . والهدف منه هو اعطاء القاريء فكرة عن اهمية هذا الموضوع ومجالات استخداماته .وفي واقع الامر . فان تطبيقات نظرية البيانات كثيرة جداً ومتنوعة بشكل يصعب حصرها في فصل واحد .فقد يحتاج بعضها الى فصول عديدة . بل ان للبعض منها كتباً . كما هي الحالة في شبكات السيول . وفي تحليل الشبكات الكهربائية .وعليه فان شرحنا لهذه التطبيقات سيكون مختصرا جداً ومقتصراً على الحالات المبسطة .

(6 – 1) تقليل حوادث التقاطعات في المعامل

في بعض المعامل الكبيرة . توجد خطوط سكك نقل داخلي من مواقع الى مواقع اخرى . وقد تتقاطع تلك الخطوط مع بعضها . هذه التقاطعات تسبب الكثير من الحوادث كما انها تؤخر عملية النقل . وقد تؤدي في بعض الاحيان الى انقلاب عربات النقل . ومن

أوضح الامثلة على ذلك معامل صنع الآجر فلو فرضنا ان لدينا m من أفران تحميص الآجر ، وان هنالك n من أرصفة التحميل ، حيث توجد الشاحنات لنقل الآجر الى خارج المعمل ، وبفرض ان كل فرن يتصل بخط حديدي مع كل رصيف ، فان هنالك تقاطعات بين هذه الخطوط . والمطلوب انشاء خطوط المواصلات الداخلية هذه وتعيين مواقع الافران وأرصفة التحميل بحيث يكون عدد نقاط تقاطع الخطوط الحديدية أقل ما يمكن ، لأجل تقليل حوادث الاصطدام بينها ، وتقليل حوادث انقلاب العربات أو تأخرها عند مرورها بنقاط التقاطع .

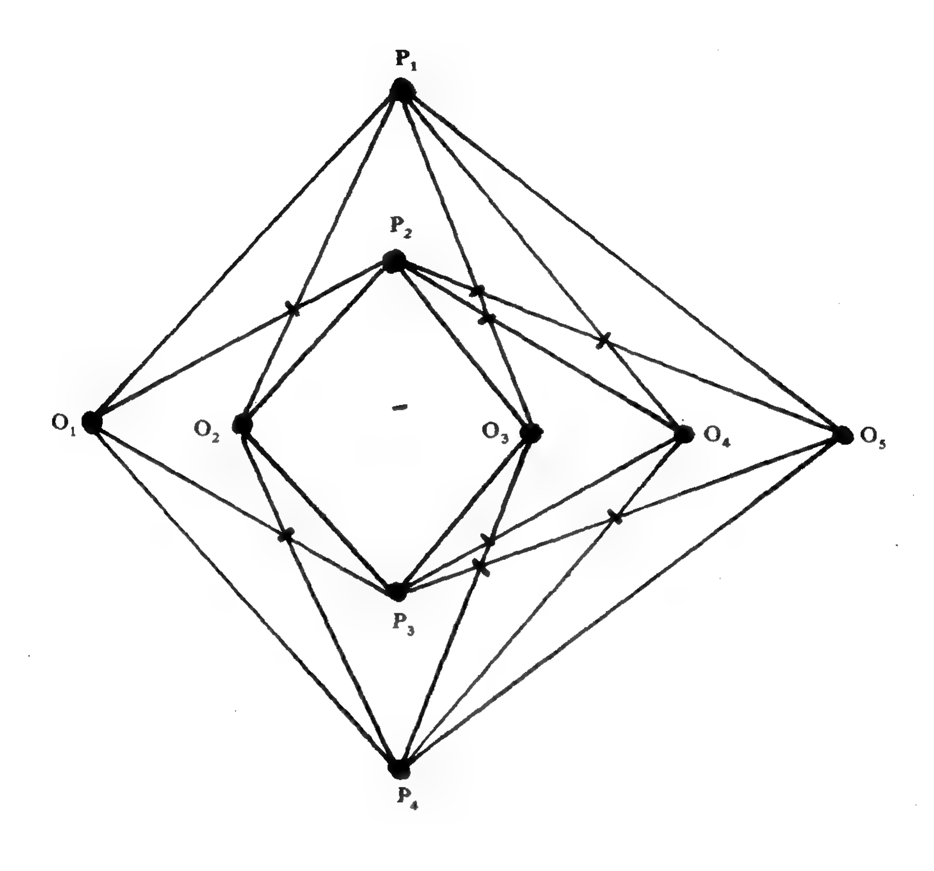
يمكن حل هذه المسألة ضمن اطار نظرية البيانات ؛ حيث تُمثِّل الافران برؤوس $O_1, O_2, \ldots, O_m$ ، وتُمثَّل أرصفة التحميل برؤوس أخرى $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ، وتُمثَّل خطوط السكك الحديدية بحافات ، وبما اننا افترضنا (لتسهيل الامور) أن كل فرن يتصل مع كل رصيف بخط حديدي واحد ، فان كل O_i يتصل بحافة واحدة فقط مع كل P_j .
وهكذا ، فان البيان الذي يمثل هذه المسألة ثنائي التجزئة تام $K_{m,n}$. وعليه ، بموجب المبرهنة (4 — 14) ، فان أقل عدد من التقاطعات هو

$$\gamma(K_{m,n}) = \begin{cases} (r^2 - r)(s^2 - s), & \text{عندما } m = 2r \text{ و } n = 2s \\ (r^2 - r)s^2, & \text{عندما } m = 2r, n = 2s + 1 \\ r^2(s^2 - s), & \text{عندما } m = 2r + 1, n = s \\ r^2 s^2, & \text{عندما } m = 2r + 1, n = s + 1 \end{cases}$$

كما ان انشاء هذا البيان بالعدد الاصغر من التقاطعات قد شرح في المبرهنة (4 — 14) .
فاذا كانت لدينا خمسة افران $O_1, \ldots, O_5$ مع أربعة أرصفة تحميل $P_1, \ldots, P_4$ ، فان تصميم المواقع المؤدي الى أقل عدد من التقاطعات يكون كما هو مبين في الشكل (6 — 1) . نلاحظ ان لدينا 8 تقاطعات وفقا للصيغة المذكورة أعلاه .

تمارين (6 — 1)

(1) ارسم الاتصالات في داخل معمل آجر يحتوي على 5 أفران و 3 أرصفة تحميل بحيث ان عدد التقاطعات أقل ما يمكن. هل توجد بيانات أخرى بأقل عدد من التقاطعات عندما يُستغنى عن بعض الاتصالات ؟



شكل (6 - 1)

(2) ارسم الاتصالا ت في داخل معملٍ آجر يحتوي على 6 أفران و 4 أرصفة تحميل بحيث ان عدد التقاطعات أقل مايمكن . ما هو أقل عدد من التقاطعات عندما يستغنى عن اتصال واحد فقط ؟

(3) يراد انشاء معمل يتكون من خمس وحدات متفرقة . فاذا علمت ان طبيعة العمل في هذه الوحدات يتطلب وصل كل وحدتين بخط حديدي (لا يشترط ان يكون مستقيما) . فبين كيفية وصل الوحدات ببعضها بحيث تقلل عدد التقاطعات الى الحد الادنى .

(4) اعد التمرين (3) لمعمل يتكون من 6 وحدات .

(6 – 2) إستعمال التطابق الشجري في الكيمياء العضوية

نشرح في هذا البند طريقة ادموندز(J. Edmonds) في تطابق (indentification) شجرتين . طريقة ادموندز هي طريقة جيدة ، أي انمقدار العمل اللازم لتنفيذ الطريقة يتزايد جبريا (وليس أُسّيا) مع تزايد عدد حافات البيان .

من ناحية عملية ، فان تطابق البيانات أوالبيانات الجزئية ذوأهمية كبيرة في الكيمياء العضوية ، حيث يمثل الجزيء كبيان رؤوسه تمثل الذرات وحافاته تمثل الأواصر (bonds) بين ذرات الجزيء . في حقيقة الامر ، وجود ذرات مختلفة في الجزيء لايؤدي الى تعقيدات اضافية في مسألة التطابق هذه .

ان أهمية التطابق في الكيمياء العضوية تتعدى معرفة فيما اذا كان تركيبان كيميائيان هما تركيب واحد او ان أحدهما جزء من الآخر . فالعلماء المختصون يريدون عمل فهرس cataloging) للمواد الكيميائية بحيث يمكن مباشرة معرفة موقع أية مادة في الفهرس ، وربما اضافة مواد جديدة اليه ، واكتشاف المواقع الشاغرة فيه .

تتضمن طريقة التطابق الشجري نظاماً لعمل فهرس يعين ترتيبا خاصا لكل الاشجار المنتهية . قبل كل شيء ، نشرح الأشجار الجذرية (rooted tress) وكيفية تعيين الجذر لشجرة (غير متجهة) ، أي نحدد رأسا من رؤوس الشجرة على أنه جذرها .
لتكن $T (= T_0)$ شجرة ، ولتكن T_1 الشجرة الناتجة من T_0 بازالة كل الرؤوس ذات الدرجة 1 مع الحافات الواقعة عليها . وبصورة عامة ، نعرف T_{i+1} على أنها الشجرة الناتجة من T_i بازالة الرؤوس ذات الدرجة 1 مع الحافات الواقعة عليها . تنتهي هذه العملية عندما نتوصل الى الشجرة T_k المكونة من حافة واحدة اورأس واحد (يطلق عليه مزكر T) . فاذا كانت T_k مكونة من رأس واحد ، نعتبر هذا الرأس جذرا لـ T ، واذا كانت T_k مكونة من حافة واحدة ، يكون أحد رأسي تلك الحافة جذر T . في الحالة الاخيرة ، نعتبر الرأس الذي يؤدي الى شجرة جذرية ذات مرتبة (سوف نشرح المرتبة فيما بعد) أصغر هو الجذر ، وعندما يؤدي الرأسان الى شجرتين جذريتين متطابقتين (أي لهما نفس المرتبة) نعتبر أياً من الرأسين هو الجذر .

لكل شجرة جذرية توجد مقابلها متتابعة منتهية عناصرها اعداد صحيحة موجبة ، ولا توجد شجرتان جذريتان مختلفتان لهما نفس المتتابعة ، ان طريقة تحديد اذا كانت شجرتان جذريتان ، T_i و T_j ، متطابقتين أم غير متطابقتين ، تتحول الى

عملية حساب المتتابعتين المقابلتين للشجرتين T_i و T_j ثم مقارنتهما . علماً بان لدينا طريقه جيدة لمقارنة المتتابعتين المقابلتين للشجرتين T_i و T_j ، كما سيتضح من تعريف هذه المتتابعات .

نعطي مرتبة لكل من الاشجار الجذرية وفقاً لمتتابعتها كالاتي :
الشجرة T_1 اقل مرتبة من الشجرة T_2 اذا وجد عدد طبيعي k بحيث ان لكل $j < k$ يكون الحدان بترتيب j في المتتابعتين المقابلتين متساويين ، وبشرط : (أ) يوجد حد ترتيبه k في المتتابعة المقابلة لـ T_2 ولا يوجد حد ترتيبه k في المتتابعة المقابلة لـ T_1 ، او (ب) الحد الذي ترتيبه k في المتتابعة المقابلة لـ T_1 اقل من الحد الذي ترتيبه k في المتتابعة المقابلة لـ T_2 [انظر المثال (1)] .

ليكن r جذر الشجرة T . اذا ازلنا r مع كل الحافات الواقعة عليه ، نحصل على عدد من الاشجار الجزئية ، يطلق عليها عوامل (factors) الشجرة الجذرية T . عدد عوامل T يساوي درجة جذرها r ، وكل عامل يحتوي على رأس واحد فقط متجاور مع r ، ويعتبر هذا الرأس جذر الشجرة الجزئية . وعليه ، فان كل شجرة جدرية T ، والتي تتكون من اكثر من رأس واحد ، تتحلل بطريقة وحيدة الى عامل أواكثر، وكل عامل هو شجرة جذرية أصغر من T .

والان نشرح كيفية تعيين المتتابعة المقابلة لشجرة جذرية T . اذا كانت T مكونة من رأس واحد فقط ، فان المتتابعة المقابلة لها تتكون من عنصر واحد هو العدد 1.
لنفرض ان $T_1 , T_2 ,..., T_h$ هي عوامل T ، وان $S_1 , S_2 ,..., S_h$ هي متتابعاتها على الترتيب. عندئذ ، نكون المتتابعة S المقابلة لـ T كالاتي :

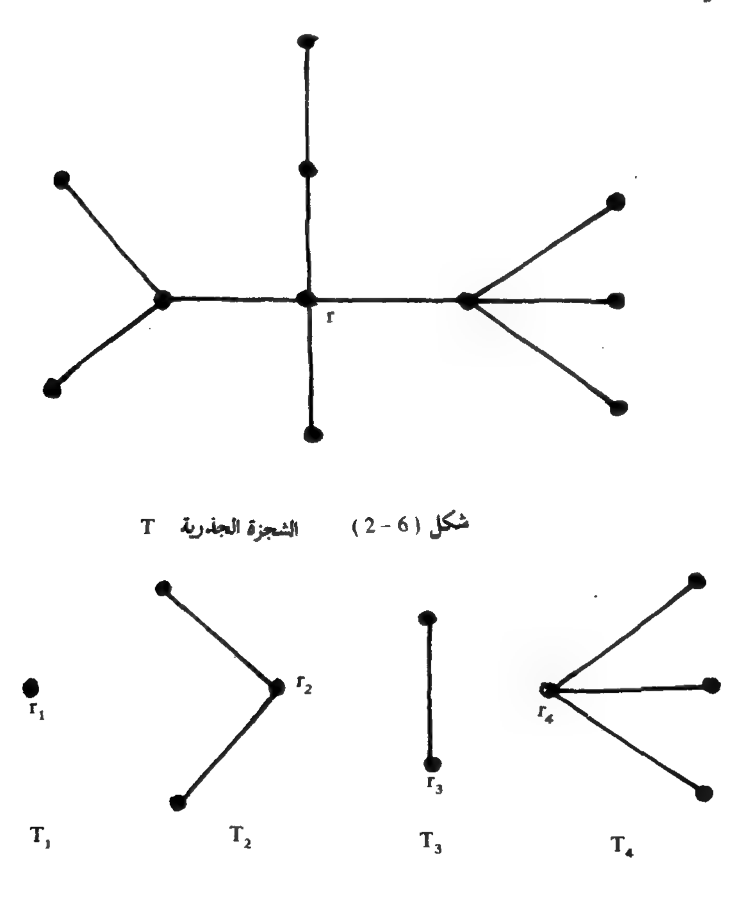
الحد الاول في S هو عدد رؤوس T ويليه المتتابعات $S_1 , S_2 ,..., S_h$ حسب مراتبها ، تصاعدياً . بالطبع ، اذا كانت مرتبة S_i هي نفس مرتبة S_j فان ترتيبها في S يمكن ان يكون S_i ثم S_j او بالعكس

وبذلك ، فان كافة حدود $S_1 , S_2 ..., S_h$ تكون حدود S ماعدا الحد الاول. في الحقيقة ، الحد الاول هو مجموع الحدود الاولى في المتتابعات $S_1 , S_2 ,..., S_h$

زائداً واحد .بطبيعة الحال ، يجب ان نكون قد اوجدنا كلاً من $S_1, S_2, \ldots, S_h$ وكل من هذه المتتابعات اصغر من S .كما ان ايجاد S_i يكون وفق نفس هذه الطريقة ، وهكذا بالنسبة لمكونات S_i-قبل ان نواصل شرحنا لهذا الموضوع نوضح ما تقدم ذكره بمثال .

مثال (1) : جد متتابعة الشجرة T المعطاة في الشكل (6 – 2)

الحل : من السهولة ان نجد ان الرأس r هو جذر T . بازالة الجذر r مع الحافات الواقعة عليه نحصل على العوامل T_1, T_2, T_3, T_4 للشجرة T ، وهذه مبينة في الشكل (6 – 3) ، حيث r_i هو جذر T_i ، لكل $i = 1, 2, 3, 4$.



شكل (6 - 2) الشجرة الجذرية T

شكل (6 - 3) عوامل T

نجد مباشرة أن متتابعات $T_1 . T_2 . T_3 . T_4$ هي بالترتيب

$$S_1 = (1) . S_2 = (3 . 1. 1) . S_3 = (2. 1) . S_4 = (4 , 1, 1, 1)$$

الترتيب التصاعدي لهذه المتتابعات حسب المراتب هو $S_1 . S_3 . S_2 . S_4$. أي أن مرتبة T_1 أقل من مرتبة T_3 - ومرتبة T_3 أقل من مرتبة T_2 ، ومرتبة T_2 أقل من مرتبة T_4 ؛ وسنعبر عن ذلك بالصيغة

$$T_1 < T_3 < T_2 < T_4$$

وهكذا نحصل على المتابعة للشجرة T ،

$$S = (11; 1; 2,1 ; 3,1 , 1 ; 4,1 ,1,1).$$

لاحظ أن هنالك تقابلاً متبايناً وحيداً بين حدود S ومجموعة رؤوس T بحيث إن الحد الاول في S يقابل جذر T ، والحدود الاخرى في S تقابل نفس رؤوس T_i التي تقابل حدود S_i . وكل رأس v في T هو جذر شجرة واحدة فقط التي هي عامل من عوامل T ، أو عامل لعامل ... لـ T .كما أن قيمة الحد، في S الذي يقابل الرأس v يساوي عدد الرؤوس في الشجرة الجزئية التي جذرها v .

من أهم خواص المتتابعة S الخاصة بتطابق الاشجار الجذرية هو وحدانية ترتيب حدودها . بالرغم من عدم وجود ترتيب ثابت لرؤوس الشجرة الجذرية T .

واضح . من تعريف S . أنه لاجل أن تتطابق شجرتان فانه من الضروري تطابق متتابعتهما . وسنبين الآن أن تطابق المتتابعتين S_1 و S_2 للشجرتين الجذريتين T_1 و T_2 على الترتيب . كافٍ لجعل T_1 و T_2 متطابقتين . ولاجل ذلك . نثبت أنه نستطيع أن ننشأ شجرة جذرية وحيدة T اذا أعطيت S . بحيث تصبح S المتتابعة المقابلة لـ T .

اذا كانت S مكونة من حد واحد . فان هذا الحد هو العدد 1 . وعندئذ تكون T مكونة من رأس واحد فقط . اما اذا كانت S مكونة من عدة حدود . فنجزيء S الى متتابعات جزئية منفصلة . S_i . حيث إن $i = 1.2 . ... k$. من حدود متتالية في S وتحقق الشرطين :

(أ) اذا كان u_i . حيث إن $i = 1.2 ... k$. هو الحد الاول في S_i . فان u_1 هو الحد الثاني في S . وأن u_i ، $i > 1$. هو أول حد في S بعد u_{i-1} ولايقل عنه.

(ب) لايوجد، في S يأتي بعد u_k ولايقل عنه .

المتتابعـات $S_1, S_2, ..., S_k$ هـي فـي الحقيقيـة المتتابعـات المقابلـة للعوامـل $T_1, T_2, ..., T_k$ للشجرة T . وهذه تنتج من حقيقتين :

(1) الحد الاول في المتتابعة التي تمثل شجرة جذرية هو اكبر من كل حدودها الاخرى ،
(2) المتتابعات التي تقابل عوامل T تكون مرتبة في S وفق تزايد مراتبها .

بعد تركيب T_i التي تتمثل بـ S_i ، لـكل $i = 1,2 ..., k$ ، نركب الشجرة الجذرية T من $T_1, T_2, ..., T_k$ باضافة رأس v ، وهـو جذر T ، ووصله بحافة مع جذر كل من $T_1, T_2, ..., T_k$. ان تركيب كل مـن T_i يتم بهذا الاسلوب أيضاً ، اي نتبع الاستقراء على حجم المتتابعة ، فاذا لم تكن S_i مكونة من حد واحد ، فنجزئها بالطريقة التي وصفت فيما تقدم ، وهكذا . والمثال الآتي يوضح الطريقة .

مثال (2) : جد الشجرة الوحيدة التي تُمثلها المتتابعة

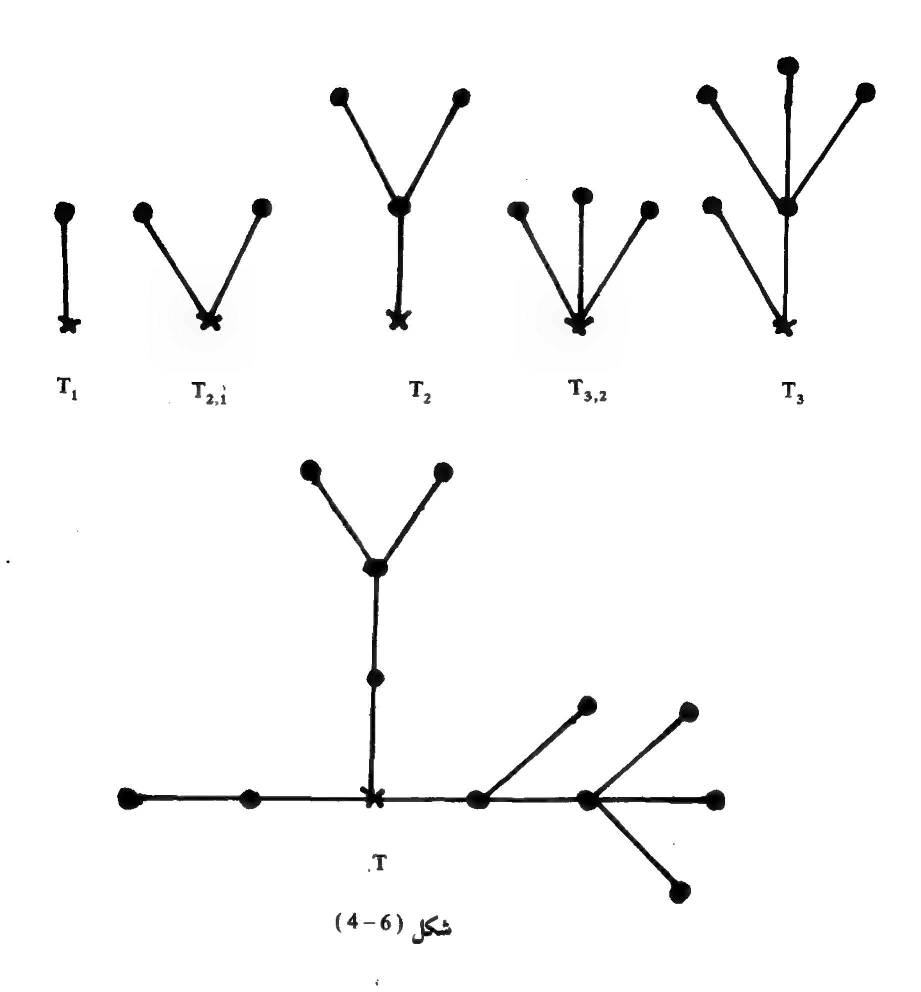
$$S = (13, 2,1,4, 3, 1, 1, 6, 1,4\ 1,1,1).$$

الحل : باتباع طريقة تجزئة S الى متتابعات جزئية تحقق الشرطين (أ) و(ب) ، نتوصل الى

$$S_1 = (2, 1) , S_2 = (4, 3, 1,1), S_3 = (6, 1, 4, 1,1,1).$$

واضح أن S_1 تُمثل شجرة جذرية T_1 مكونة من حافة واحدة . ولاجل ايجاد الشجرة الجذرية T_2 التي تُمثلها S_2 ، نستخرج من S_2 متتابعة جزئيةواحدة هي $S_{2,1} = (3,1,1)$ والتي تُمثل الشجرة الجذرية $T_{2,1}$ المبينة في الشكـل (6 – 4) ، ومنها نحصل على T_2 .. لاحظ أننا رمزنا للجذور بعلامة × .
ولاجل ايجاد الشجرة الجذرية T_3 التي تمثلها المتتابعة الجزئية S_3 ، نجزّىء هذه الى $S_{3,2} = (4, 1, 1, 1)$ ، $S_{3,1} = (1)$ ، ومنها نحصل على $T_{3,1}$ (وهي رأس واحد) و $T_{3,2}$. ومن $T_{3,1}$ و $T_{3,2}$ نحصل على T_3

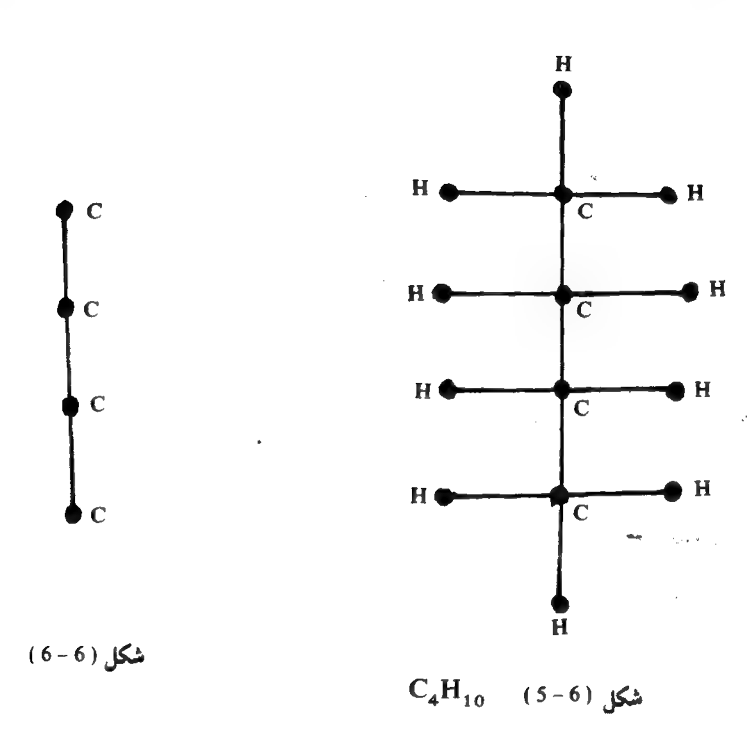
واخيراً ، نركب T من عواملها T_1 , T_2 , T_3 ، كما موضح في الشكل (6 – 4)



شكل (6 – 4)

نعود الان الى شرح كيفية الاستفادة من التطابق الشجري في موضوع الكيمياء العضوية. يمكن تمثيل بعض الجزيئات العضوية كبيانات مستوية رؤوسها هي الذرات وحافاتها هي الاواصر بين تلك الذرات. من الجزيئات البسيطة التركيب هي جزيئات هيدروكاربونات سلسلة البرافين ، $C_k H_{2k+2}$ التي في كل جزيء منها يوجد k من ذرات الكاربون و (2 + 2k) من ذرات الهيدرجين . كل ذرة كاربون لها أربع أواصر وكل ذرة هيدروجين لها اصرة واحدة ، ولهذا فان الرؤوس التي تمثل ذرات الكاربون هي ذات درجة 4 ، والتي تمثل ذرات الهيدروجين هي ذات درجة 1 ، أما الاواصر فهي الحافات . فمثلاً ، عندما $k = 4$ يكون لدينا C_4H_{10} (وهو البيوتان butane) ، ويمثل هذا الجزيء بالشجرة

المبينة في الشكل(6 — 5).وبما أن عدم ذكر الرؤوس التي تمثل ذرات الهيدروجين يُبسّط البيان ، فسوف نقتصر على تعيين ذرات الكاربون فقط ؛ وهكذا يمكننا تمثيل C_4H_{10} كما في الشكل(6 — 6). بطبيعة الحال ، يمكن الحصول على أحدهما من الآخر مباشرة ، لان درجة كل رأس C هي 4 ودرجة كل رأس H هي 1.



شكل (6 - 6)

شكل (6 - 5) C_4H_{10}

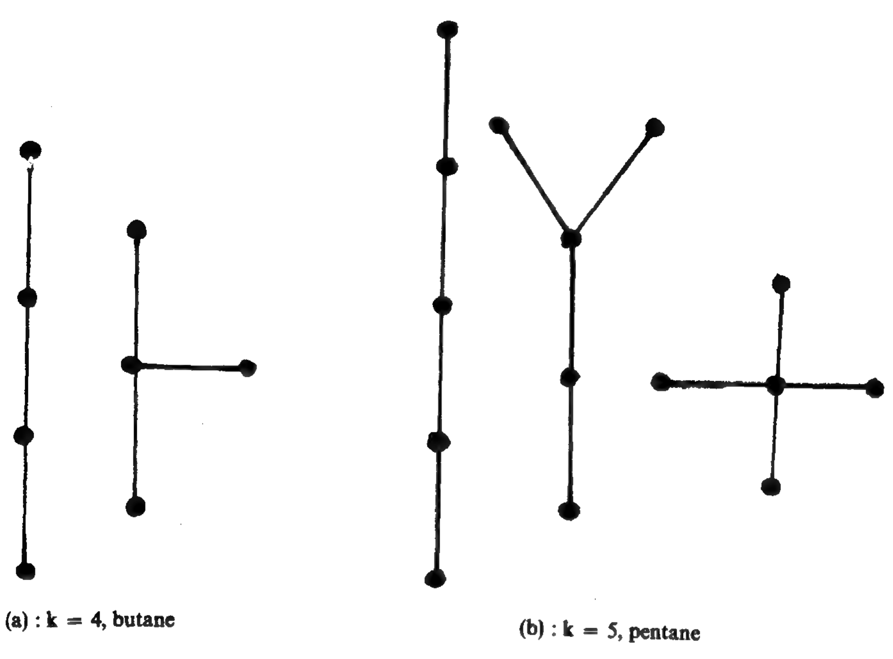
لما كان عدد الرؤوس n في البيان الذي يمثل C_kH_{2k+2} هو (2 + 3k). وان مجموع درجات هذه الرؤوس هو (2 + 2k) + 4k . فان عدد حافاته m هو(3k+1) . وهكذا ، فان

$$m = n - 1 .$$

وبما أن هذا البيان متصل ، فانه شجرة ؛ أي أن البيان الذي يمثل جزيء $C_k H_{2k+2}$ هو شجرة . وبذلك لاتوجد أواصر مضاعفة .

كل الاشجار التي لها k من الرؤوس ودرجة كل رأس لاتزيد على 4 تتضمن كل الاشكال الممكنة لاتصالات ذرات الكاربون في الجزيء C_kH_{2k+2} . فعندما k = 4 تكون لدينا الشجرتان في (a) من الشكل (6 – 7) . وعندما k = 5 يكون لدينا ثلاث

أشجار وهي مرسومة في (b) من الشكل (6 - 7) . وبالطبع ، يمكن اضافة ذرات هيدروجين بعدد كاف بحيث تصبح درجة كل رأس من الرؤوس التي تمثل ذرات الكاربون مساوية لـ 4 . يطلق على كل من الاشكال (الاشجار) في (6 - 7) آيسومر (isomer) .

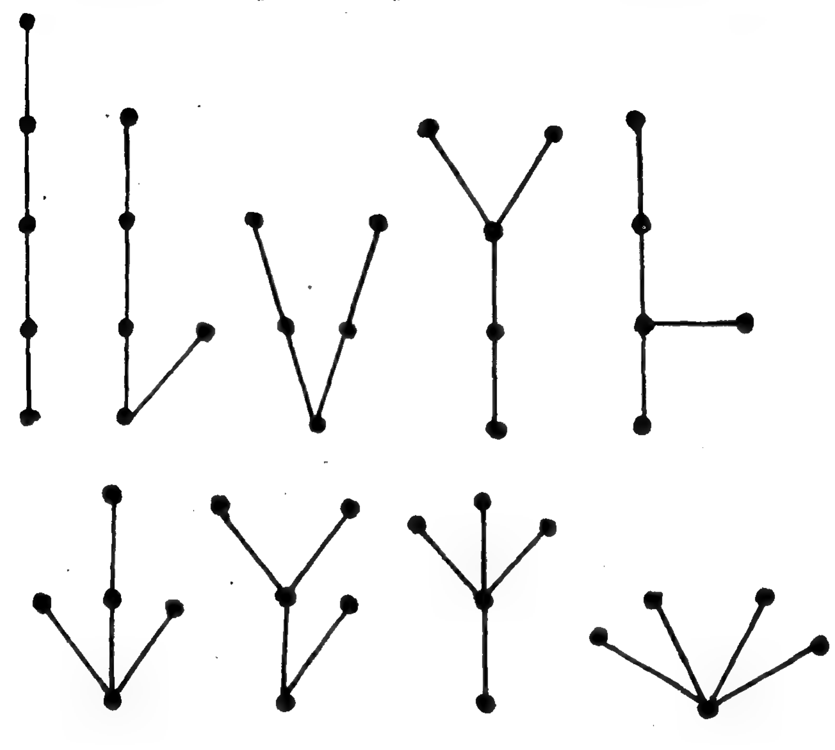


شكل (6 - 7)

يطلق على الآيسومر المتكون من درب واحد هيدروكاربون درب - مستقيم (straight - chain hydrocarbon) ، ويطلق على كل الاشكال الاخرى للآيسومرات هيدروكاربونات درب - غصني (branched - chain hydrocarbons)

عندما تزداد قيمة k ، فان خواص الايسومرات المختلفة تصبح مختلفة تماماً ؛ ولاجل التمييز بينها ، تصبح من الضروري معرفة عدد الايسومرات الموجودة لكل k . ولقد كان كيلي (سنة 1875) أول من استعمل نظرية البيانات في الكيمياء لاجل حل هذه المسألة بدون أخطاء وبدون تكرار بعض الايسومرات . ولقد مثل جزيئات الهيدروكاربونات باشجار جذرية ثم اخذ كل الاشكال الممكنة ، واخيراً أوجد تلك التي تكون متطابقة

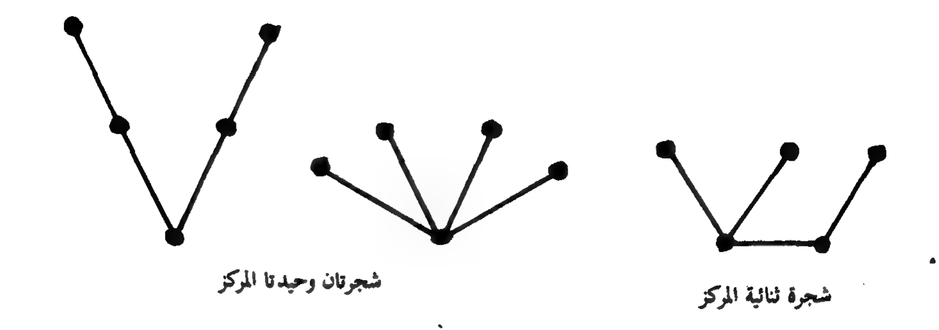
كيميائيا (أي تمثل نفس المركب الكيميائي) بطريقة اولية لاتصلح عندما تكون k كبيرة . فمثلاً ، عندما $k = 5$ ، يوجد لدينا تسع اشجار جذرية وهي مبينة في الشكل (6 - 8) . ويمكن أن نبرهن على أن ستاً منها متطابقة كيميائياً مع الاخرى . وعليه ، توجد ثلاثة ايسومرات فقط عندما $k = 5$ ، وهي تلك المبينة في (b) من الشكل(6 - 7) .



شكل (6 - 8)

يمكن حل مسالة التخلص من تكرار الاشجار الجذرية المتطابقة بتمثيل كل الاشكال الممكنة وتقسيمها الى أشجار وحيدة المركز . واشجار ثنائية المركز . كما في الشكل(6 - 9) الاشجار الوحيدة المركز هي التي لها جذر واحد مع أغصان تبدأ من الجذر وبنفس الطول (أي دروب بسيطة متساوية الطول تبدأ من الجذر وتنفصل . الا عند الجذر) . أما الاشجار الثنائية المركز فهي التي لها جذران مع غصن رئيسي واحد او اكثر عند كل من الجذرين وبنفس الطول . وعندئذ نستطيع بسهولة ازالة التكرار .

برسم كافة الايسومرات الممكنة حسب القاعدة الآنفة الذكر . تمكن كيلي من تعيين



شكل (6 - 9)

الايسومرات المختلفة التراكيب لسلاسل البرافين لحد $k = 13$. وقد اعطينا نتائجه هذه في الجدول الآتي :

k =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
عدد الايسومرات	1	1	1	2	3	5	9	18	35	75	159	355	802

هنالك نتائج اخرى في هذا المجال لجزئيات ثنائية الاواصر . $C_k H_{2k}$. أو ثلاثية الاواصر $C_k H_{2k-2}$. وليس لدينا المجال لشرحها في هذا الكتاب .

تمارين (6 – 2)

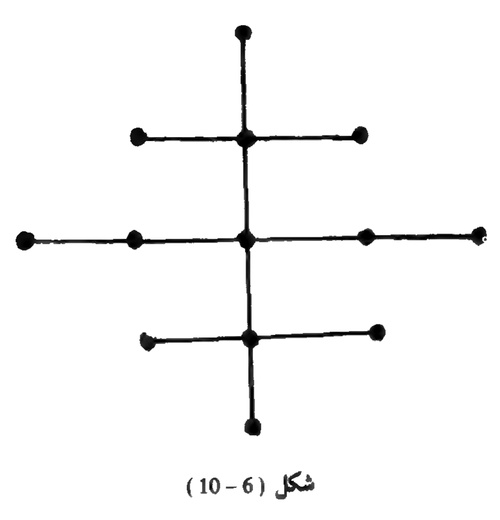
(1) عين جذر الشجرة T المعطاة في الشكل (6 10) . ثم اكتب المتتابعة المقابلة لها . قارن مرتبة هذه الشجرة مع مرتبة الشجرة المعطاة في المثال (2) .

(2) لتكن S المتتابعة المقابلة لشجرة جذرية T . ولتكن S′ المتتابعة الناتجة من S بحذف كل الحدود ذات القيمة 1. إثبت أن S′ تصلح لفرض تطابق الاشجار الجذرية تماماً كما هي الحالة بالنسبة للمتتابعة S′ .

(3) لتكن $S = (14, 2, 1, 5, 2, 1, 2, 1, 6, 5, 2, 1, 2, 1)$ متتابعة

لشجرة جذرية T . ارسم T مؤشرا على جذرها .

(4) اتبع طريقة كيلي لتعيين الاشجار الوحيدة المركز والثنائية المركز عندما $k = 4$ و $k = 6$



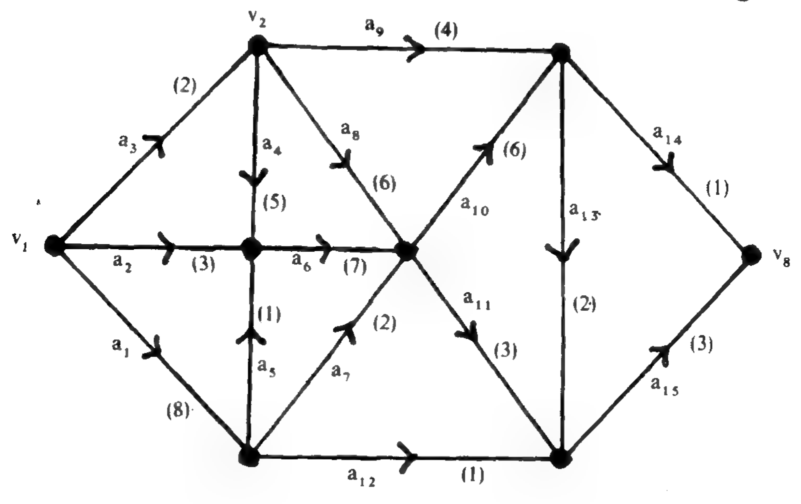
شكل (6 - 10)

(6 — 3) وسيلة تقييم ومراجعة البرامج

البيان الموجه هو أداة طبيعية لوصف وتحليل نماذج المشاريع المعقدة والمكونة من عدد كبير من الفعاليات ذات علاقات مترابطة بعضها مع بعض. المشروع باعتباره كـلاً يمكن أن يكون، مثلاً، العملية الاجمالية للتصميم وللبناء ولأختبار اجزاء المعدات ؛ أو عملية تصميم وانشاء بناء ما متضمنه الاعتبارات ذات العلاقة مع تعيين الموقع وتحضيره. وبصورة عامة، نفرض أن لدينا مشروعاً متكاملاً ومعيناً تعييناً تاماً، وأنه يمكن تجزئـة مجموعة كل الاعمال المرتبطة به الى فعاليات $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ غيرمتداخلة مع بعضها. بطبيعة الحال، هنالك طرق عديدة لتجزئة مشروع ما الى فعاليات. إن تحديد تلـك التجزئة يخضع لأعتبارات تمكننا من تعيين كل العلاقات الضرورية التي سوف يتطلبها شرحنا.

بعض الفعاليات المعينة تكون مستقلة عن البقية، بينما توجد فعاليات أخرى تعتمد على اكتمال إنجاز غيرها، أي أنها تعتمد على أخرٍ من ناحية الوقت، بالصيغة : الفعالية a_i

يجب أن تتم قبل أن تبدأ الفعالية a_j . اذا علمت علاقة الاعتماد هذه لكل الفعاليات مع الزمن اللازم لانجاز كل فعالية. فيمكننا عند ذلك تمثيل المشروع بواسطة بيان موجه كل حافة موجهة فيه تمثل فعالية واحدة. رأس الابتداء لها يمثل وقت ابتداء الفعالية. ورأس الانتهاء يمثل وقت انتهائها. وهكذا . فان كل رأس في هذا البيان يمثل حدثاً (event) ويحدد زمناً معيناً نسبة الى وقت ابتداء المشروع. سوف نعتبر الرأس v_1 وقت ابتداء المشروع . و v_n وقت إنجاز المشروع كله. حيث إن n هو عدد الرؤوس . أما الرؤوس الاخرى فهي تمثل وجود الفعاليات والعلاقة بينها وفق مايأتي : اذا كانت a فعالية تبدأ من الرأس v . فان الفعالية a لايمكن أن تبدأ بالعمل إلا بعد انجاز كل الفعاليات المنتهية عند v، بالطبع . يمكن ابتداء العمل بالفعالية a في أي وقت بعد ذلك. فمثلاً. في الشكل (6 - 11) لايمكن ابتداء العمل بالفعالية a_{15} إلا بعد الانتهاء من انجاز الفعاليات a_{11} ، a_{12} ، a_{13} ولايمكن العمل بالفعالية a_{10} (وكذلك a_{11}) إلا بعد انجاز الفعاليات a_6 ، a_7 ، a_8 وعندما يتم انجاز الفعاليتين a_{14} و a_{15} تكون كل الفعاليات الأخرى قد أنجزت. وعندئذ يتم المشروع.



شكل (6 - 11)

هنالك اساليب ادارية. منها ماهو معروف بـ «وسيلة تقييم ومـــراجعة البـرامـج (Program Evalution and Review Technique) ويختصر " PERT ". وآخـــر يعـــرف بــــ « طريـــقـــة الـــدرب الـــحـــرج (Critical Path Method) ». ووسائل أخرى ذات علاقة بالموضوع. تستعمل بيانات الفعاليات كاساس تركيبي يستند اليها تحليل مشاريع معقدة. لتوضيح التحليل

الاساسي ، نفرض ان كل فعالية a_i تستغرق زمناً معيناً ، $t(a_i)$.نفترض هنا ان $t(a_i)$ ثابت ، ولكن عملياً يعتبر زمن انجاز كل فعالية متغيراً خاضعاً لتوزيع احتمالي صيغته العامة معروفة ويمكن تخمين متغيراته الوسيطية .

لاحظ ان الارقام المحصورة بين قوسين والمرافقة للحافات الموجهة في الشكل (6 - 11) تمثل ازمنة تلك الفعاليات .

يقصد بزمن درب موجه من v_1 الى v_i مجموع ازمنة الحافات الموجهة الواقعة على ذلك الدرب .واضح ان زمن الدرب الموجه من v_1 الى v_i الذي له اطول زمن يمثل حداً ادنى للزمن الذي يجب ان يمضي قبل ان يصبح ممكناً الابتداء بالفعاليات التي فيها v_i رأس ابتدائي .وعليه ، فان المناسب ان نقرن مع كل رأس عدداً (هو زمن) كالاتي

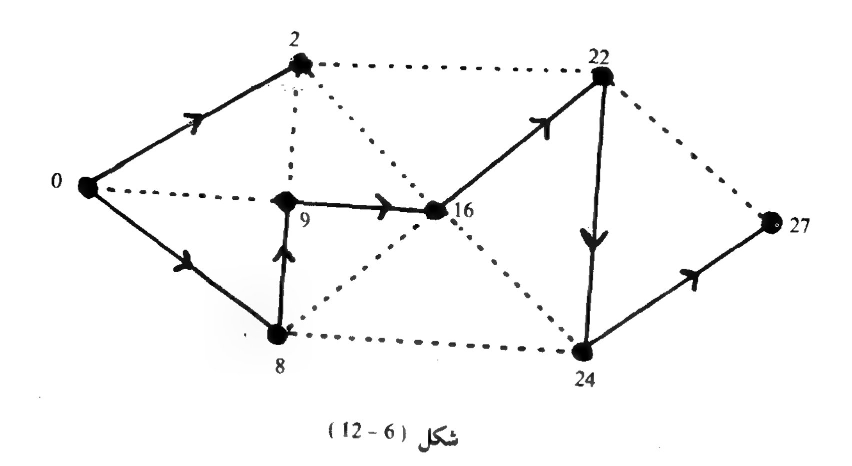
$$T(v_1) = 0$$

$$T(v_i) = \max\{t(P)\}, \quad \text{عندما } i \neq 1$$

حيث ان $t(P)$ هو زمن الدرب الموجه P . وان الاعظم (max) يؤخذ نسبة الى ازمنة كل الدروب الموجهة من v_1 الى v_i

لاحظ انه من الطبيعي ان يكون بيان الفعاليات خالياً من الدارات الموجهة (لماذا؟) .كما ان هنالك على الاقل درباً موجهاً واحداً من كل رأس v_i الى الرأس v_n وهكذا . باستخدام الطريقة المعطاة في البند (3 3) مع اجراء التعديلات اللازمة [انظر تمرين (7) من مجموعة تمارين (3 - 3)] يمكن الحصول على شجرة القياس الاكبر العظمى نسبة للمصدر v_1 . اي ايجاد شجرة مولدة بحيث ان الدرب الموجه من v_1 الى v_i هو الاطول زمناً .بطبيعة الحال . القياس للحافات الموجهة هنا هو الزمن .فمثلاً . الشكل (6 - 12) يبين شجرة القياس الاكبر العظمى لبيان الفعاليات المعطى في الشكل (6 - 11) . علماً بان الاعداد المثبتة على الرؤوس هي قيم $T(v_i)$ المعرفة فيما تقدم .

كما سبق ان ذكرنا . فان اقرب وقت ممكن ان تبدأ منه الفعالية (v_i, v_j) هو بعد مضي مالايقل عن $T(v_i)$ من الوحدات الزمنية من وقت ابتداء المشروع .واذا



شكل (6 - 12)

برمجنا المواعيد بحيث ان كل فعالية (v_i, v_j) تبدأ في الوقت $T(v_i)$ وتنجز في الوقت $T(v_i) + t(v_i, v_j)$. حيث ان $t(v_i, v_j)$ هو الزمن اللازم لانجاز الفعالية (v_i, v_j) . فعندئذ سوف ينجز المشروع باكمله في زمن $T(v_n)$ من الوحدات وهذا هو اقصر زمن ممكن لانجاز المشروع : ففي المثال السابق . نجد ان أقصر زمن لانجاز المشروع هو $T(v_8) = 27$ وحدة زمنية .

يطلق على درب موجة من v_1 الى v_n ذي الزمن الاطول اسم درب موجه حرج . زمن أي درب موجه حرج هو الزمن الاقصر اللازم لانجاز المشروع بأكمله . اضافة الى ذلك . فان هذا الزمن الاقصر يتحقق اذا ابتدأنا بكل فعالية من فعاليات الدرب الموجه الحرج مباشرة بعد انجاز الفعالية السابقة لها على ذلك الدرب . بصورة عامة . الدرب الموجه الحرج ليس وحيداً . فقد يكون هنالك اكثر من درب موجه حرج واحد . ولكن كلها متساوية الزمن .

اذا افترضنا اننا نرغب في انجاز المشروع بالزمن الاقصر . فانه لايزال هنالك مجال أوسع في برمجة الفعاليات غير الحرجة . وهي تعرف بالفعاليات المتراخية (slacks)

كل حدث v_i يجب أن يتحقق بوقت يكفي لانجاز كل الفعاليات بالتتابع في اي درب موجه من ذلك الحدث v_i الى الحدث النهائي v_n . هذه الفكرة تقودنا الى أن نقرن مع كل حدث v_i زمناً آخر بجانب الزمن $T(v_i)$. وهذا الزمن يعرف كالآتي :

$$X(v_n) = 0$$

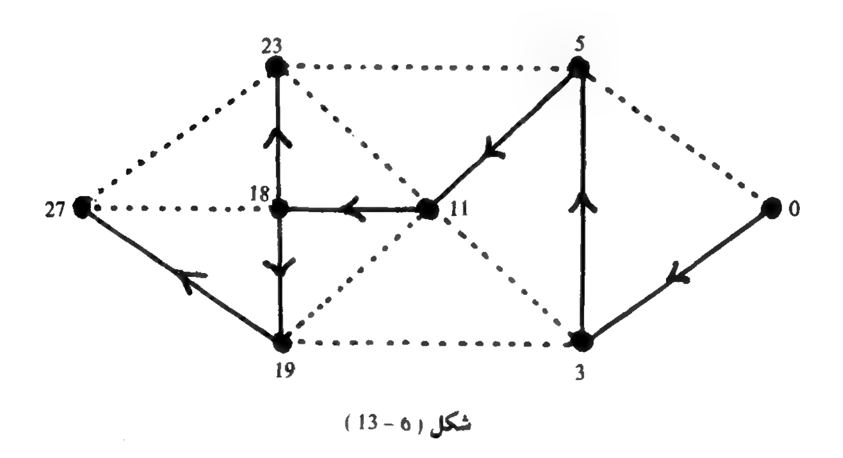
$$X(v_i) = \max \{ t P) \}, \quad i \neq n$$ عندما

حيث ان $t(\overline{P})$ هوزمن الدرب الموجه $\overline{P}$ من v_i الى v_n ، وأن الاعظم يوخذ نسبة الى زمنة كافة الدروب الموجهة من v_i الى v_n . وهنا أيضاً نستعمل طريقة البند (3 - 3) لايجاد $X(v_i)$ وذلك بعكس الاتجاه (وقتياً) لكل حافة موجهة ، ثم نجد شجـرة القياس الاكبر العظمي بالنسبة الى المصدر v_n ، وبعد ذلك نرجع اتجاهات الحافـات الى وضعها الاصلي . ولاجل توضيح ذلك ، استخرجنا $X(v_i)$ للبيان المعطى فـي الشكل (6 -11) ، وهي موضحة في الشكل (6 - 13) . بما أن الزمن $X(v_i)$ مقيس من نهاية المشروع الذي ينجز بعد $T(v_n)$ من الوحدات الزمنية من وقت ابتداء المشروع ، فانه من المناسب تعريف الاعداد

$$L(v_i) = T(v_n) - X(v_i).$$

واضح أن $L(v_i)$ يمثل الوقت الاخير الذي فيه يجب ان يتم تحقيق الحدث v_i دون زيادة الزمن الكلي الاقصر اللازم لانجاز المشروع . يمكن أن نثبت أن لكـل v_i ،

$$T(v_i) \leqq L(v_i). \qquad \ldots\ldots (1 - 6)$$

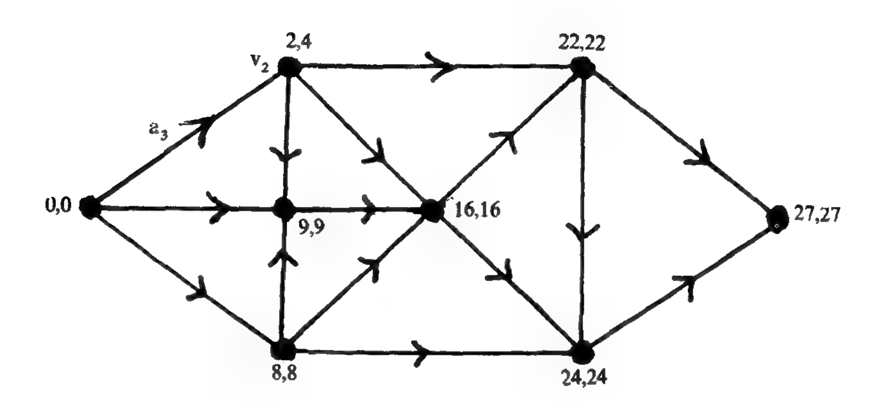


شكل (6 - 13)

الشكل (6 - 14) يظهر بيان الفعاليات المعطى في شكل (6 - 11) مع العدديـن $T(v_i)$ و $L(v_i)$ لكل رأس v_i . بالطبع . في حالة اختلاف هذين العددين . فان العدد الكبير هو $L(v_i)$ والعدد الصغير هو $T(v_i)$. وذلك بموجب المتباينة (6 - 1)

تفيدنا قيم $T(v_i)$ و $L(v_i)$ في تعيين مجال حرية برمجة الفعاليات المتراخيـة بدون زيادة الزمن الاقصر اللازم لانجاز المشروع . فمثلاً . يمكن أن نبدأ بتنفيذ الفعاليـة

المتراخية a_3 في أي وقت بين 0 و 2 (باعتبار أن وقت ابتداء المشروع هو 0) . وبمـا أن انجاز الفعالية a_3 يستغرق وحدتين ، فان الحدث v_2 يتحقق في الوقـت 4 أوقبلـه . وهكذا بالنسبة للفعاليات المتراخية الاخرى ، وبذلك يمكن تحقيق كل حدث v_i فـي وقت بين $T(v_i)$ و $L(v_i)$ معتمدين على كيفية توزيع زمن التراخي حسبما يناسـب العوامل الاخرى (مثل الكلفة ، توفر المواد ، توفر الايدي العاملة ، . . .) اللازمـة لتنفيذ المشروع .



شكل (6 – 14)

لقد سبق أن ذكرنا ان البيانات الموجهة تستخدم في العديد من المشروعات ، وفيما يأتي مثال على احد هذه التطبيقات .

مثال : الجدول الاتي يظهر فعاليات مشروع تخطيط لبناء مصنع مع المدة اللا مة لانجاز كل فعالية ومايجب أن يسبقها من فعاليات قبل المباشرة بها . وقد رمز لكل فعالية بحرف لاجل التبسيط . ارسم بيان هذا المشروع وجد الزمن الاقصر لانجازه .

رمز الفعالية	الفعالية	الفعاليات السابقة لها	الزمن المقدر بالاسابيع
a	الحفر	—	3
b	الاساسات	a	5
c	الجدران	b	10
d	السقف	c	6
e	التأسسات الصحية	c	9
f	الاعمال الكهربائية	c	11
g	تكحيل السقف	d	7
h	تكحيل الجدران	g,e	8
k	بناء السور	d	4
l	تكحيل السور	k	3
m	رصف الارضية	f,h	5
n	نصب المكائن	m	13
p	الصبغ الداخلي	f,h	7
q	الصبغ الخارجي	l	4
r	التشطيب الداخلي	p,n	6
s	التشطيب الخارجي	q	2

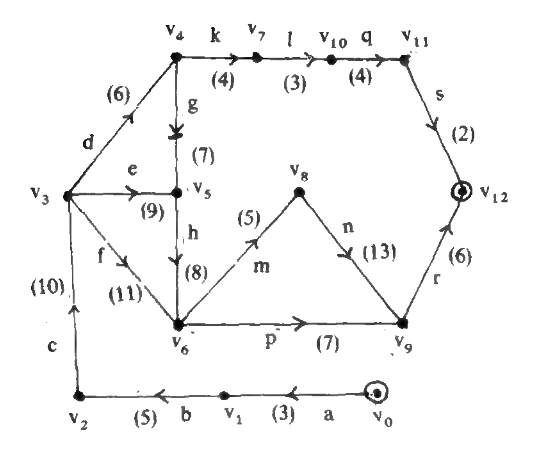
الحل : نرمز للاحداث (الرؤوس) بـ $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{12}$
حيث أن v_0 يمثل ابتداء المشروع وأن v_{12} يمثل اتمام المشروع . من الجدول نرسم بياناً يمثل هذا المشروع . وهو المبين في الشكل (6 - 15) .

ولقد كتبت أزمنة الفعاليات بين قوسين على البيان الذي يمثل المشروع .

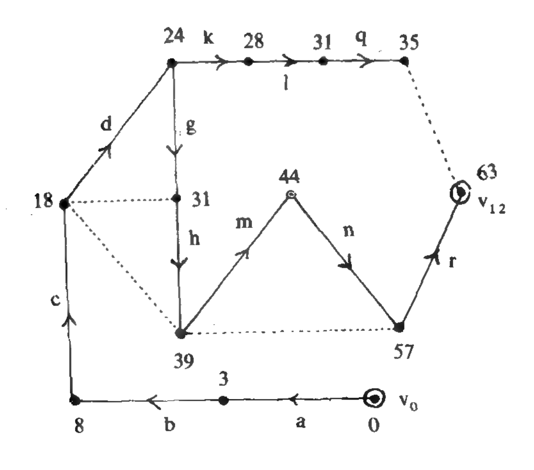
نبدأ بالشجرة المولدة المكونة من الفعاليات a,b, c, d, e, h, m, n, k, l, q, s .
ومنها نحصل على شجرة القياس الاكبر العظمى نسبة للمصدر v_0 . وهي مبينة في الشكل

(6 - 16) . وقد ثبت على رؤوسها الوقت المبكر لانجاز كل حدث . ومن هذه الشجرة نجد أن الزمن الأقصر لاكمال المشروع هو 63 إسبوعاً، وان الدرب الموجه الحرج هو

(a, b, c, d, g, h, m, n, r)



شكل (6 - 15) بيان مشروع بناء مصنع



شكل (6 - 16)

تمارين (6 — 3)

(1) إثبت صحة المتباينة (6 – 1) .

(2) برهن على أن $L(v_i) = T(v_i)$ اذا واذا فقط v_i يقع على درب موجه حرج.

(3) جد $L(v_i), T(v_i)$ لكل حدث v_i في بيان الفعاليات الناتج من البيان المعطى في الشكل (6 – 11) بعكس إتجاه الفعالية a_4 .

(4) جد زمن التراخي . $L(v_i) - T(v_i)$ لكل حدث v_i في مشروع نباء المصنع في المثال المعطى في الشرح . ثم ناقش كيفية الاستفادة من زمن التراخي في تنفيذ الفعاليات المتراخية.

(5) ظهرت المعلومات الآتية في شركة لصنع المكائن الزراعية :

العمل	العمل السابق له	الوقت المقدر بالايام
a	—	6
b	—	4
c	a	9
d	a	8
e	b	5
f	d,e	7
g	d,e	15
h	c,f	5

ارسم بيان الفعاليات (الاعمال هنا) لهذا المشروع . واحسب الدرب الحرج ماهو الزمن الاقصر لاتمام المشروع ؟ هل يتغير الدرب الحرج اذا كان العمل g يأخذ 10 أيام بدلا من 15 يوماً ؟

(6 — 4) تطبيقات مبرهنة هول :

هنالـك تطبيقات عديـدة لمبرهنـة هـول (Hall's Theorem) [مبرهنـة (5 – 10)] . وقد أوضحنا في البند(5 – 4) كيفية الاستفادة منها في تلوين حافات بيان ثنائي التجزئة . ونذكر في البند تطبيقاً آخر لهذه المبرهنة ، كما أننا سوف نذكر في الفصل السابع استخداماتها في مواضيع اخرى في نظرية البيانات .

يطلق أيضاً على مبرهنة هول اسم مبرهنة الزواج . لان فيليب هول أثبت مبرهنته هذه سنة 1935 جواباً عن مسألة معروفة باسم « مسألة الزواج » وهي تنص على : « اذا كان لدينا مجموعة منتهية من البنين . وكل واحد منهم يعرف عدداً من البنات . فهل يمكن تزويج كل البنين بحيث ان كلاً منهم يتزوج من بنت يعرفها – بفرض عدم السماح بتعدد الزوجات أو الازواج ؟ »

يمكن أن نعبر عن مسألة الزواج هذه بصيغة ملائمة لواقع مجتمعنا كالآتي : « لنفرض ان لدينا مجموعة من الرياضيين الهاوين لواحدة أو أكثر من الالعاب الرياضية

وان كلاً منهم يرغب في ان يكون رئيساً لاحدى الفرق الرياضية التي يهواها ، فهل يمكن تنسيب كلٍ من هؤلاء الرياضيين لرئاسة فرقة واحدة فقط من الفرق التي يهواها بشرط ألا يكون هنالك اكثر من رئيس واحد لكل فرقة ؟

يمكن تمثيل هذه المسألة ببيان ثنائي التجزئة . فاذا كانت مجموعة الرياضيين الهواة هي $V_1 = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$ ومجموعة الفرق الرياضية هي $V_2 = \{ t_1, t_2, \dots, t_m \}$. فان البيان الذي يمثل هذه المسألة هو بيان ثنائي التجزئة $G(V_1, V_2)$ بحيث ان الرأس p_i متجاور مع الرأس t_j اذا واذا فقط كان الرياضي p_i من هواة الفرقة الرياضية t_j .

وهكذا ، يمكننا كتابة المبرهنة (5 – 10) بالصيغة الآتية : (الشرط الضروري والكافي لحل مسألة رئاسة الفرق الرياضية هو « كل مجموعة من k من الرياضيين يهوون مجتمعين ، مالايقل عن k من الفرق الرياضية ، لكل $1 \leq k \leq n$ " .) وعندما نضع هذه المبرهنة بمصطلحات مسألة الزواج ، تصبح بالصيغة الاتية ، التي تعرف بمبرهنة هول للزواج :

(الشرط الضروري والكافي لحل مسألة الزواج هو (كل مجموعة من k من البنين يعرفون مجتمعين ، مالايقل عن k من البنات ، لكل $1 \leq k \leq n$ » .)

وهكذا ، فان مبرهنة هول تزودنا بالحل المطلوب لمسألة الزواج (أو رئاسة الفرق الرياضية) ، وكل المسائل المشابهة لها ، كما هو موضح في المثال الاتي .

مثال : لنفرض أن لدينا خمسة مهندسين ، A, B, C, D, E ، ينتمون الى جمعيات علمية هي $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ كما هو مبين فيما يأتي :

المهندس A ينتمي الى الجمعيتين α, ε

المهندس	B	ينتمي الى الجمعيتين	α, β
المهندس	C	ينتمي الى الجمعيات	β, γ, δ
المهندس	D	ينتمي الى الجمعيات	$\alpha, \gamma, \varepsilon$
المهندس	E	ينتمي الى الجمعية	β

فاذا علمت أن رئيس الجمعية يعين من بين الاعضاء المنتمين لها والراغبين في ذلك. وأن كلاً من هؤلاء المهندسين يرغب في أن يكون رئيساً لأحدى الجمعيات التي ينتمي اليها.

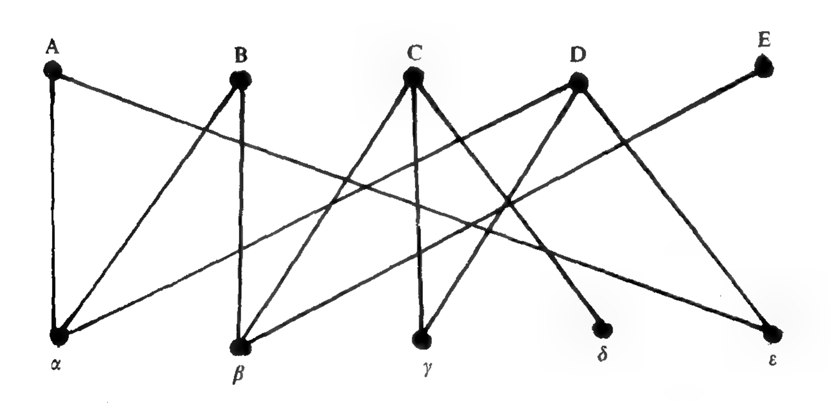
فهل يمكن إختيار رئيس من بين المهندسين A, B, C, D, E لكل من الجمعيات الخمس المذكورة؟

الحل: نرسم البيان الثنائي التجزئة $G(V_1, V_2)$. حيث أن

$$V_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\},$$

$$V_2 = \{A, B, C, D, E\}.$$

ونصل الرأس الذي يمثل مهندساً بالرؤوس التي تمثل الجمعيات التي ينتمي اليها بموجب ماأعطي في نص المثال. فنحصل على البيان المبين في الشكل (6 - 17) .



شكل (6 - 17)

من هذا البيان نلاحظ أن كل k ، حيث ان $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ، من هذه الجمعيات ينتمي اليها مالايقل عن k من هؤلاء المهندسين. لذلك. فان شرط مبرهنة هول يتحقق. وهكذا يمكن اختيار رئيس من بين هؤلاء المهندسين لكل من الجمعيات الخمس. وعلى

سبيل المثال. نختار رؤوساء الجمعيات كالآتي:

الجمعية	الرئيس
α	B
β	E
γ	D
δ	C
ε	A

تمارين (6 - 4)

(1) اعلنت احدى الدوائر عن وجود خمس وظائف شاغرة وهي: كاتب طابعة باللغة العربية. كاتب طابعة باللغة الانكليزية. كاتب حسابات، كاتب ذاتية، ومحاسب. وقد قدمت لها ستة طلبات وهي: واحد باختصاص كاتب طابعة باللغة العربية. إثنان باختصاص كاتب طابعة باللغتين العربية والانكليزية، إثنان لوظيفة محاسب. واحد باختصاص كاتب حسابات اوذاتية. هل تستطيع الدائرة سد الشواغر من هذه الطلبات؟ اذكر السبب بموجب فحوى مبرهنة هول.

(2) اذا كان المهندس D في المثال المحلول في الشرح ينتمي الى الجمعيتين α, ε فقط، فهل يمكن ان يكون كل واحد من المهندسين A, B, C, D, E رئيساً لجمعية واحدة فقط من الجمعيات $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ؟ ولماذا؟

(3) لنفرض ان لدينا مجموعة من الرياضيين $p_1, p_2, \ldots, p_n$ الهاوين لواحدة أو أكثر من الالعاب الرياضية، وان اللاعب الرياضي p_i، لكل $i = 1,2,\ldots,n$، يرغب في ان يكون رئيساً لـ h_i من الفرق الرياضية التي يهواها، فهل يمكن حل هذه المسالة؟ وما هو الشرط الضروري والكافي لحلها؟

(6 - 5) شبكات السيول (Network Flows)

إن موضوع شبكات السيول (أو شبكات الجريان) من المواضيع الاكثر تطبيقا لنظرية البيانات. ففي المرور مثلاً. قد نرغب في معرفة اكبر عدد من المركبات التي

يمكن أن تنتقل من نقطة تقاطع (دورة) الى أخرى داخل شوارع مدينة معينة خلال ساعة واحدة ، علماً اننا نعرف القيد الاعلى لعدد السيارات التي يمكن أن تمر في كل شارع وحيد الاتجاه في ساعة واحدة (الشوارع المزدوجة الاتجاه تعتبر شارعين كل منهما وحيد الاتجاه ، واتجاه احدهما هو عكس اتجاه الآخر) . تمثل هذه المسألة كبيان موجه D ، رؤوسه هي نقاط تقاطع الشوارع ، وحافاته الموجهة هي الشوارع ، مع اقتران كل حافة موجهة بعدد صحيح غير سالب يمثل سعة الشارع المقابل لتلك الحافة .

ومثل اخر الدوائر الكهربائية ، فقد نريد معرفة أعلى تيار يصل من عقدة (رأس) الى عقدة اخرى ، اذا علمنا القيد الاعلى لوحدات التيار التي يمكن ان يتحملها كل عنصر لوحده في اتجاه معين . يمكن تمثيل هذه المسألة ايضاً كبيان موجه رؤوسه هي عقد الشبكة الكهربائية وحافاته الموجهة هي العناصر الكهربائية مع اقتران كل حافة موجهة بعدد غير سالب يمثل القيد الاعلى للتيار الذي يمكن ان يمر في العنصر المقابل لها .

وهنالك امثلة تطبيقية عديدة يمكن تمثيلها كبيانات موجهة حافاتها مقترنة باعداد غير سالبة .ولأجل التمهيد لدراسة هذه المسائل بصورة عامة ، نشرح بعض المفاهيم .

تعرف الشبكة (the network) ، N ، على انها بيان موجه ، كل حافة موجهة (u,v) ، فيه مقترنة بعدد حقيقي غير سالب ، يرمز له $\psi(u, v)$ ويطلق عليه سعة (capacity) الحافة (u, v) بمعنى آخر ، الشبكة N تعرف بأنها زوج مرتب (D, ψ) ، علماً أن D هو بيان موجه وأن ψ هي دالة من مجموعة الحافات الموجهة لـ D الى مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة . يطلق على ψ دالة السعة . لكل رأس v في الشبكة N ، نعرف $\psi^{+}(v)$ بأنه مجموع سعات كل الحافات الموجهة (v, x) في N التي رأسها الابتدائي هو v ، وبالمثل ، نعرف $\psi^{-}(v)$ بأنه مجموع سعات كل الحافات الموجهة (x, v) في N التي رأسها النهائي هو v . يمكن بسهولة ان نبرهن على أن

$$\sum_{v \varepsilon V} \psi^{+}(v) = \sum_{v \varepsilon V} \psi^{-}(v), \qquad \ldots\ldots\ldots (2-6)$$

علماً أن V هي مجموعة رؤوس N .

اذا كانت S مجموعة من حافات N ، فاننا نرمز بـ $\psi(S)$ لمجموع سعات الحافات الموجهة المنتمية الى S .

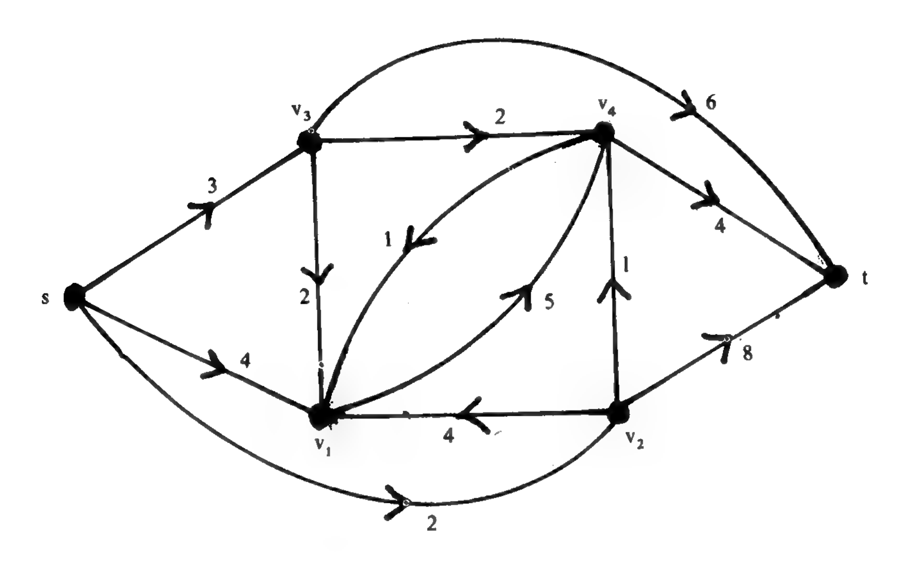
مثال (1) : الشكل (6 – 18) يبين شبكة N ، علماً أن الاعداد المقترنة بالحافات

الموجهة هي سعاتها ومنه نجد أن

$\psi^+(v_1) = 5, \psi^-(v_1) = 1 + 2 + 4 + 4 = 11,$

$\psi^+(s) = 3 + 4 + 2 = 9, \psi^-(s) = 0,$

$\psi^+(t) = 0 \qquad \psi^-(s) = 8 + 4 + 6 = 18.$



شكل (6 - 18)

سوف نميّز في كل شبكة N رأسين معينين نطلق على احدهما المنبع أو المصدر (the source) ويرمز له s . ونطلق على الآخر المصب (the sink) ، ونرمز له t . قد يكون هنالك اكثر من مصدر واحد أو اكثر من مصب واحد . ولكن هذه الحالة يمكن معالجتها وتحويلها الى حالة وجود مصدر واحد ومصب واحد . كما سنبين فيما بعد .

اذا كانت $N = (D, \psi)$ شبكة . فاننا نعرف السيل في N على انه دالــة . ϕ . من مجموعة حافات D الى مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة . نحقــق الشرطين الاتيين :

(أ) لكل حافة موجهة (v, u) . $\phi(v, u) \leq \psi(v, u)$

(ب) لكل رأس v ، ماعدا المصدر s والمصب t .

$$\phi^+(v) = \phi^-(v),$$

علما أن

$$\phi^+(v) = \sum_x \phi(v, x), \phi^-(v) = \sum_x \phi(x, v). \qquad \dots (3-6)$$

كما أن المجموع يؤخذ لكل الرؤوس x في V المتجاورة مع v .
الشرط (ب) يعني ان مجموع السيول التي تخرج من v يساوي مجموع السيول التي تدخل اليه .

يقال لسيل ϕ في N انه سيل صفري اذا كان $\phi(v,u) = o$ لكل حافة موجهة (v, u) في N .وفيما عدا ذلك يقال للسيل انه غير صغري . ويقال لحافة موجهة (v, u) انها مشبعة (saturated) بالسيل ϕ اذا كان

$$\phi(v, u) = \psi(v, u),$$

وفيما عدا ذلك يقال للحافة الموجهة انها غير مشبعة (unsaturated) . اضافة الى ذلك . اذا كانت S مجموعة من حافات N . فنعرف

$$\phi(S) = \sum_{a \in S} \phi(a)$$

يمكن ان نثبت بسهولة . كما في (6 - 2) . أن

$$\sum_{v \in V} \phi^+(v) = \sum_{v \in V} \phi^-(v). \qquad \dots\dots (4-6)$$

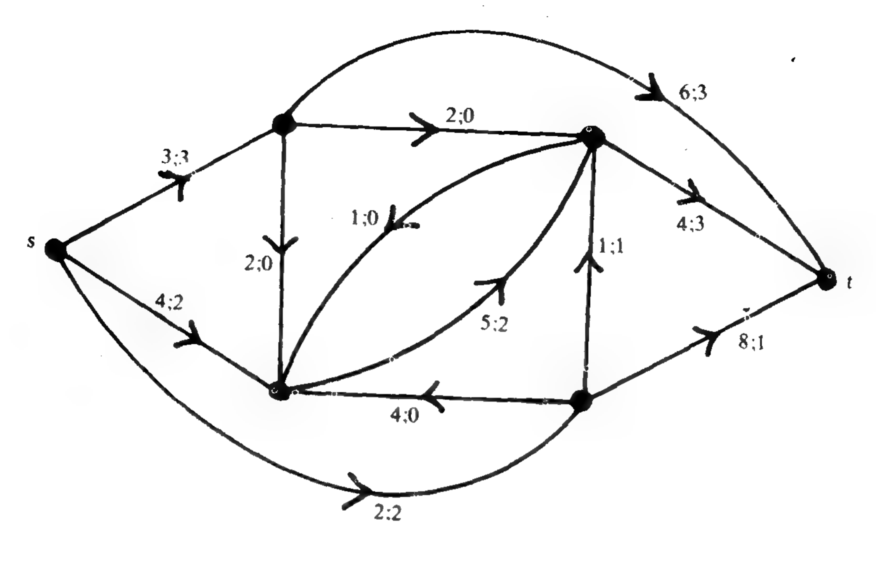
وهكذا . ينتج من الشرط (ب) أن

$$\phi^+(s) - \phi^-(s) = \phi^-(t) - \phi^+(t) = q ;$$

يطلق على q قيمة (value) السيل ϕ من s الى t

لقد ذكرنا في الشكل (6 - 19) سيلاً للشبكة المعطاة في الشكل (6 - 18) . قيمة هذا السيل هي 7 . [لاحظ أن العدد الاول – من اليسار – المقترن بالحافة هو سعتها اما العدد الثاني فهو السيل الذي يمر فيها .]

المسألة المهمة في هذا الموضوع هي مسألة ايجاد سيل من المصدر الى المصب بحيث ان قيمته اعظم ما يمكن . يطلق على اي سيل ذي قيمة عظمى سيل أعظمي (maximal flow) من s الى t في الشبكة N . بطبيعة الحال . يمكن ان يكون لشبكة N عدة سيول أعظمية مختلفة من المصدر s الى المصب t . ولكن من الواضح أن كلها ذات قيمة واحدة .



شكل (6 - 19)

ان دراسة مسالة السيول الاعظمية مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بمفهوم المجموعات القاطعة لبيانات موجهة . ولاجل ذلك نعطي التعريف الآتي .

لتكن N شبكة فيها الرأس s هو المصدر والرأس t هو المصب . يقال لمجموعة S من حافات موجهة للشبكة N انها قاطعة (cut) اذا احتوت S على حافة موجهة واحدة على الاقل من كل درب موجه من المصدر s الى المصب t . اي ان ازالة حافات S من N يؤدي الى قطع كل الدروب الموجهة من s الى t . ولايوجد في S مجموعة جزئية فعلية لها هذه الخاصية . لاحظ أن تعريف القاطعة يكون نسبة الى s و t . أي انها « قاطعة تفصل s عن t » [راجع البند (2 3)] . ولما كان هذا واضحاً . فلا نجد ضرورة لذكر العبارة « تفصل s عن t » كلما ذكرنا قاطعة في الشبكة N

ولاجل التوضيح . نأخذ الشبكة N المعطاة في الشكل (6 - 18) فنجد أن كلا من

$$S_1 = \{ (s, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_2, t) \}$$

$$S_2 = \{ (s, v_1), (s, v_2), (s, v_3) \}$$

قاطعة لـ N

بطبيعة الحال ، كل قاطعة للشبكة $N = (D, \psi)$ هي مجموعة - قاطعة تفصل s عن t في البيان الموجه D .

يقصد بسعة القاطعة S للشبكة N مجموع سعات الحافات الموجهة المنتمية الى S ، وسنرمز لذلك بـ $\psi(S)$ ؛ أي أن

$$\psi(S) = \sum_{a \varepsilon S} \psi(a)$$

فمثلاً ، بالنسبة للشبكة N المعطاة في الشكل (6 - 18) ،

$$\psi(S_1) = 17 \quad , \quad \psi(S_2) = 9 .$$

يقال لقاطعة في الشبكة N انها قاطعة أصغرية (minimal cut) اذا كانت سعتها أصغر مايمكن نسبة لكافة القاطعات الاخرى في N . فمثلاً ، S_1 هي ليست أصغرية .

من تعريف السيل والقاطعة نستنتج الحقيقة البسيطة الآتية :

« قيمة اي سيل في N من المصدر s الى المصب t لاتزيد على سعة أية قاطعة لـ N . »

ولكن الاهم من هذه الحقيقية هي المبرهنة (6 - 3) المعروفة بمبرهنة السيل الأعظمي والقاطعة الأصغرية (max – flow min – cut) والتي كان قد برهنها لأول مرة العالمان فورد وفولكيرسون (Ford and Fulkerson) سنة 1955 . ان برهان هذه المبرهنة يتطلب استعمال الماخوذة (6 - 1) والتي بدورها تتطلب بعض الرموز والتعاريف .

لتكن S قاطعة للشبكة $N = (D, \psi)$ ، وليكن D′ البيان الناتج من D بازالة حافات S . ولتكن V مجموعة رؤوس D . عندئذ ، نعرف المجموعة X بانها مجموعة رؤوس تحتوي على المصدر s وعلى كل الرؤوس ، x ، في D بحيث يوجد درب موجه واحد على الاقل من s الى x في D′ . كما نعرف

$$\bar{X} = V - X .$$

واضح من تعريف القاطعة ان المصب t ينتمي الى $\bar{X}$.ولذلك نرمز في بعض الاحيان لهذه القاطعة S كزوج مرتب $(X, \bar{X})$ ؛ اي ان $(X, \bar{X})$ هي مجموعة كل الحافات الموجهة والتي رأسها الابتدائي في X ورأسها النهائي في $\bar{X}$.

اذا كان ϕ اي سيل في N ، فان $\phi(X, \bar{X})$ هو مجموع سيول الحافات الموجهة من رأس في X الى رأس $\bar{X}$. وبالمثل نعرف $\phi(\bar{X}, X)$.

مأخوذة (6 - 1) : اذا كان ϕ سيلاً في شبكة($N=(D, \psi$ من المصدر s الى المصب t بقيمة q . فان لكل قاطعة S يكون

$$q= \phi (X, \bar{X}) - \phi (\bar{X} , X).$$

البرهان : بما ان $t \notin X , s \varepsilon X$ وبموجب (6-3). نتوصل الى .

$$q = \phi^+ (s) - \phi^- (s) = \sum_{v \varepsilon X} [\phi^+ (v) - \phi^- (v)]$$

$$= \sum_{v \varepsilon X} \sum_{x} \phi (v , x) - \sum_{v \varepsilon X} \sum_{x} \phi (x , v)$$

نجزيء الحافات الموجهة والواردة في المجموعين اعلاه الى ثلاث اصناف :

(أ) كل الحافات الموجهة التي تصل بين رأسين في X . كل من هذه الحافات الموجهة يظهر مرة واحدة فقط في كل من المجموعين . وبذلك فان السيل الذي يمر فيه يختصر .

(ب) كل الحافات الموجهة من رأس في X الى رأس في $\bar{X}$. وهذه تظهر فقط في المجموع الاول .

(ج) كل الحافات الموجهة من رأس في $\bar{X}$ الى رأس في X . وهذه تظهر فقط في المجموع الثاني .

وعليه فان الناتج يختصر الى .

$$q = \phi (X, \bar{X}) - \phi (\bar{X} , X).$$

مبرهنة (6 - 1) -- مبرهنة السيل الاعظمي والقاطعة الأصغرية - في أية شبكة سيول تكون قيمة أي سيل أعظمي مساوية لسعة أية قاطعة اصغرية .

البرهان : بموجب المأخوذة (6 - 1) . فان قيمة أي سيل أعظمي لاتزيد على سعة أية قاطعة أصغرية . لذلك . فانه يكفي ان نبرهن على وجود قاطعة سعتها تساوي القيمة لسيل أعظمي معطى

ليكن سيلاً أعظمياً من المصدر s الى المصب t في الشبكة $N= (D, \psi)$ قيمته q . نعرف المجموعة W من رؤوس N كالاتي : المصدر s ينتمي الى W ؛

واذا كان G البيان الناتج من D باهمال اتجاهات الحافات . فان رأساً x في W اذا واذا فقط وجد في G درب من s الى x بالصيغة

$$([v_0, v_1], [v_1, v_2], \ldots, [v_{k-1}, v_k]),$$

علماً بان $v_0=s,\ v_k=x$، له الخاصية وهي ان كل حافة $[v_i, v_{i+1}]$ فيه تقابل اما (أ) حافة موجهة (v_i, v_{i+1}) غير مشبعة بالسيل ϕ ، أو (ب) حافة موجهة (v_{i+1}, v_i) ذات سيل غير صفري.

نرمز لمجموعة رؤوس N التي لاتنتمي الى W بالرمز $\bar{W}$. اي ان

$$\bar{W} = V - W.$$

سوف نبرهن على ان $t \varepsilon \bar{W}$. اذا لم تكن t في $\bar{W}$ ، فانها في W . وعندئذ يوجد في G درب بالصيغة

$$([s, v_1], [v_1, v_2], \ldots, [v_{k-1}, t])$$

يحقق الخاصية التي ذكرت فيما تقدم. يطلق على هكذا درب اسم درب ازدياد السيل (flow augmenting path) بالنسبة للسيل ϕ. ليكن ε عدداً حقيقياً موجبا يحقق الشرطين :

$$(1) \quad \varepsilon \leqq \psi(a) - \phi(a),$$

لكل حافة موجهة a من الصنف (أ) ، و

$$(2) \quad \varepsilon \leqq \phi(a),$$

لكل حافة موجهة a من الصنف (ب) في درب ازدياد السيل المذكور فيما تقدم.

والآن ، يمكننا ان نزيد السيل بمقدار ε في الحافات الموجهة من الصنف (أ) ، وننقص بمقدار ε السيل في الحافات الموجهة من الصنف (ب) ، وعندئذ سوف تزداد قيمة السيل فتصبح $q+\varepsilon$. ولكن هذا يناقض فرضنا أن ϕ هو سيل أعظمي. وعليه ، فان $t \varepsilon \bar{W}$.

والان ، نرمز بـ S لمجموعة الحافات الموجهة (x, y) بحيث ان $x \varepsilon W$ و $y \varepsilon \bar{W}$. واضح ان S قاطعة لـ N ، وان كل حافة موجهة في S هي مشبعة بالسيل ϕ ، لان خلاف ذلك يؤدي الى ان يصبح y في W. كما ان السيل في كل حافة موجهة من رأس y في $\bar{W}$ الى رأس x في W هو صفر ، لان خلاف ذلك يؤدي الى انتماء y الى W . وهكذا

بموجب المأخوذة (6 – 1) ينتج .

$$q = \phi(W, W) - \phi(W, W) = \phi(W, W) = \psi(S).$$

وبهذا يتم البرهان . ■

تفيد نامبرهنة السيل الاعظمي والقاطعة الاصغرية في التحقق فيما اذا كان سيل ما أعظمياً او انه غير أعظمي ، ولكنها لاتفيدنا في ايجاد سيل أعظمي .وهكذا ، من الضروري ايجاد طريقة منظمة تمكننا من ايجاد سيل اعظمي ، وخاصة عندما تكون الشبكة غير بسيطة .

الطريقة التي نذكرها فيما يأتي تصح لشبكات فيها دالة السعة ψ دالة صحيحة القيمة ، اي ان $\psi(a)$ هو عدد صحيح غير سالب ، لكل حافة موجهة (a).اذا كانت الشبكة ذات سعات نسبية ، فانه يمكن بسهولة تغيير وحدة قياس السعة بحيث تصبح سعة كل حافة موجهة عدداً غير سالب ، ويتم ذلك باختيار وحدة قياس جديدة تساوي $1/m$ وحدة أصلية ، علماً بان m هو المضاعف البسيط لمقامات السعات بالوحدات الاصلية .

خطوات ايجاد سيل أعظمي :

(1) بالاستناد الى الشبكة المعطاة $N = (D, \psi)$ نرسم بياناً موجهاً مساعداً ، نرمز له I ، رؤوسه هي رؤوس D نفسها ، ولكل حافة موجهة (x, y) في D نرسم في I حافتين موجهتين (x, y) و (y, x)

(2) نبدأ بسيل صحيح القيمة ، ونرمز له ϕ_0. يمكن ان نأخذ ϕ_0 صفرياً ، ولكن كلما بدأنا بسيل ذي قيمة اكبر كلما قلت خطوات الوصول الى سيل أعظمي . سوف نجد متتابعة من السيول $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ بحيث ان كلاً منها ذو قيمة اكبر من قيمة السيل الذي يسبقه .

(3) اذا كنا قد وجدنا السيل ϕ_i ذا قيمة q_i ، فاننا نعين للبيان المساعد I دالة قياس λ_i معرفة نسبة الى ϕ_i كالاتي :لكل حافة موجهة (x, y) في D ·

$$\lambda_i(x, y) = \begin{cases} 0, & \phi_i(x,y) < \psi(x,y) \quad \text{عندما} \\ \infty, & \phi_i(x,y) = \psi(x,y) \quad \text{عندما} \end{cases}$$

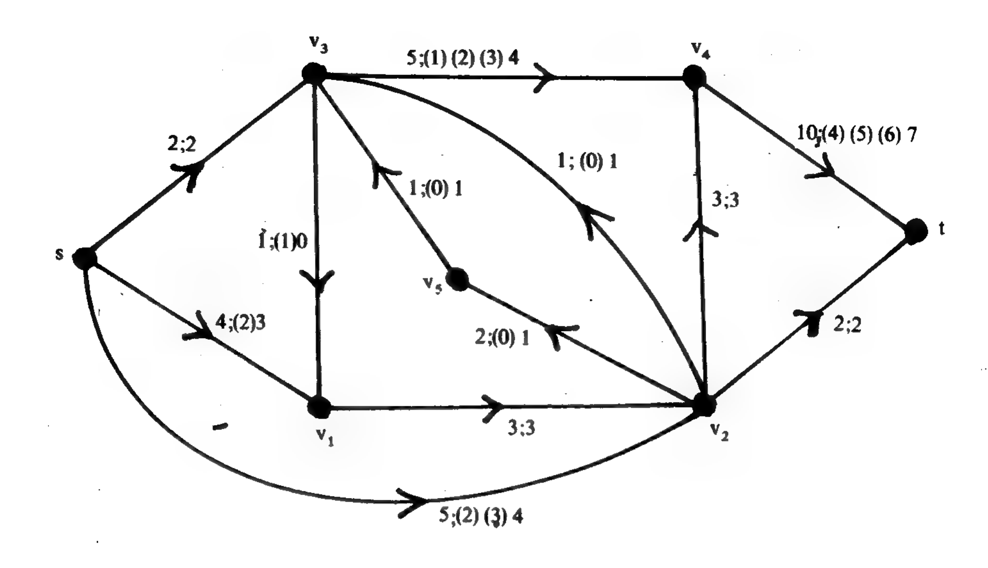
$$\lambda_i(y, x) = \begin{cases} 0, & \phi_i(x,y) > 0 \quad \text{عندما} \\ \infty, & \phi_i(x,y) = 0 \quad \text{عندما} \end{cases}$$

(4) في I ، نجد درباً موجهاً ، P_i ، من المصدر s الى المصب t باصغر قياس [يمكن استعمال الطريقة المشروحة في البند (3 – 3)] .فاذا كان قياس P_i هو ∞ ، تنتهي الخطوات ويكون عندئذ ϕ_i سيلاً أعظمياً ، أما اذا كان قياس P_i صفراً ، فعندئذ ننتقل الى الخطوة (5) .

(5) عندما يكون قياس P_i صفراً ، فان P_i يؤدي الى درب ازدياد السيل ϕ_i في N بقيمة ε_i [كما سبق شرحه في برهان المبرهنة(6 – 1)] .وعندئذ نتوصل الى سيل ، ϕ_{i+1} ، قيمته $q_i + \varepsilon_i$.[لاحظ ان سيل الحافات الموجهة التي لاتقع على درب ازدياد السيل ϕ_i لايتغير . وانما يتغير سيل الحافات الواقعة عليه فقط ، فاذا كانت الحافة بالاتجاه من s الى t نزيد سيلها بمقدار ε_i ، اما اذا كانت بالاتجاه المعاكس فننقص سيلها بمقدار ε_i] .

(6) نكرر الخطوات (3) ، (4) ، و (5) بالنسبة للسيل ϕ_{i+1} . وهكذا حتى نحصل في الخطوة (4) على دربـ موجه ، P_k ، ذي قياس ∞ . وعندئذ لايوجد درب ازدياد للسيل ϕ_k . وبذلك يكون ϕ_k سيلاً أعظمياً [انظر التمرين (3)] .

ولتوضيح خطوات طريقة ايجاد سيل اعظمي . نأخذ الشبكة N المعطاة في الشكل (6 – 20) .ونبدأ بالسيل ϕ_o المعين عليها والذي قيمته 6 وحدات .ثم نرسم البيان المساعد I . كما في الشكل (6 – 21) ونعين على كل حافة موجهة القياس بموجب الخطوة (3) بالنسبة للسيل ϕ_o . لاحظ ان الحافات المستحدثة في I (اي التي لا توجد في D) وقد رسمت بخطوط منقطة لاجل التمييز .



شکل (6 – 20)

شکل (6 – 21)

بعد ذلك نجد ان هنالك في I ، وبالنسبة للسيل ϕ_0 ، درباً موجهاً

$$P_o = \Big((s, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, t) \Big)$$

قياسه يساوي صفراً . وبذلك ، فان هذا هودرب ازدياد السيل ϕ_0 بمقدار وحدة واحدة . وعليه نحصل على ϕ_1 بقيمة 7 ؛ وقد اجريت التغيرات على سيول حافات P_0 وكتبت الى يمين السيل ϕ_0 مع وضع السيل القديم بين قوسين [وذلك في الشكل (6 – 20)] . والآن ، نغير القياسات تبعاً للسيل الجديد ϕ_1 على حافات I ، وهنا ايضاً نضع القياس القديم (في حالة تبدله) بين قوسين ، وذلك لكي لا نعيد رسم I مع قياسات جديدة لاجل اختصار الوقت والجهد .

والان ، بالنسبة للسيل ϕ_1 ، نجد في I الدرب الموجه

$$P_1 = \Big((s, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_3), (v_3, v_4), (v_4, t) \Big)$$

والذي قياسه يساوي صفراً . وبذلك نحصل على درب ازدياد السيل ϕ_1 (وهوالدرب P_1 نفسه) بمقدار 1 وحدة ايضاً . وبذلك ، فان قيمة السيل الجديد ϕ_2 هي 8 وحدات . ومن ثم نغيرّ قياسات حافات I تبعاً للسيل ϕ_2 .

واخيراً ، بالنسبة للسيل ϕ_2 ، نجد في I الدرب الموجه

$$P_2 = \Big((s, v_1), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_4, t) \Big)$$

والذي قياسه يساوي صفراً . وبذلك نحصل على درب ازدياد السيل ϕ_2 في N . وهو

$$\Big((s, v_1), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, t) \Big)$$

والذي قيمة السيل فيه هي 1 . وهكذا . نحصل على السيل ϕ_3 الذي قيمته 9 . ومن ثم نغير قياسات حافات I تبعاً للسيل ϕ_3 .

ويمكننا الآن ان نلاحظ ان I لايحتوي على درب موجه من s الى t بقياس صفري . وهكذا . فان ϕ_3 هو سيل أعظمي . لاحظ أن

$$\{ (s, v_3), (v_5, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, t) \}$$

هي قاطعة أصغرية . كل حافة موجهة فيها مشبعة . والحافة الموجهة (v_3, v_1) عديمة السيل .

اذا كانت دالة السعة لشبكة $N = (D, \psi)$ صحيحة القيمة (اي سعة كل حافة هي عدد صحيح غير سالب) . وبدأنا بسيل ϕ_0 صحيح القيمة . وأخذنا $\varepsilon_i = 1$ في كل خطوة لزيادة السيل . فاننا نتوصل الى سيل أعظمي صحيح القيمة أيضاً . وعليه ، فان لدينا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (2 - 6) : – مبرهنة السيل الصحيح القيمة –
اذا كانت دالة السعة ψ في شبكة $N = (D, \psi)$ صحيحة القيمة فانه يوجد سيل أعظمي صحيح القيمة .

لدينا العديد من المبرهنات المهمة التي تنتج مباشرة من المبرهنتين (6 - 1) و (6 - 2) . نذكر بعضاً منها فيما يأتي .

يقال لدربين بين رأسين s و t في بيان G انهما منفصلا الحافات اذا لم يشتركا باية حافة . وبالمثل نعرف الدروب الموجهة المنفصلة الحافات في بيان موجه.
يقال لمجموعة S من حافات موجهة لبيان موجه D انها مجموعةقاطعة (s;t) اذا كان كل درب موجه من s الى t في D يشترك بحافة موجهة واحدة على الاقل مع S . كما يقال لمجموعة قاطعة – (s;t) انها صغرى اذا احتوت على اقل عدد من الحافات الموجهة نسبة لكافة المجموعات القاطعة – (s;t) . وبالمثل . نعرف مجموعة قاطعة – [s;t] . ومجموعة قاطعة – [s;t] صغرى في بيان G غير موجه

مبرهنة (6 - 3) : اكبر عدد من الدروب البسيطة الموجهة من الرأس s الى الرأس t . علما بان $s \neq t$. والمنفصلة الحافات في بيان موجه D . يساوي عدد الحافات الموجهة في مجموعة قاطعة – (s;t) صغرى .

البرهان : لتكن N شبكة (D, ψ) بحيث ان $\psi(a) = 1$ لكل حافة موجهة a في D . وليكن ϕ سيلاً أعظمياً من s الى t قيمته q في N عندئذ . يكون عدد الحافات الموجهة في مجموعة قاطعة – (s;t) صغرى مساوياً لـ q . بموجب مبرهنة السيل الأعظمي والقاطعة الأصغرية والمبرهنة (6 - 2) .

ليكن p اكبر عدد من الدروب البسيطة الموجهة من s الى t والمنفصلة

الحافات في D . بما أن سعة كل حافة موجهة هي 1 . فان كل درب موجه من s الى t يزودنا بوحدة واحدة فقط من السيل ϕ . كما أن كل وحدة سيل تشغل درباً موجهاً واحداً من مجموعة الدروب البسيطة والموجهة من s الى t والمنفصلة الحافات وعليه . فان $p = q$. ■

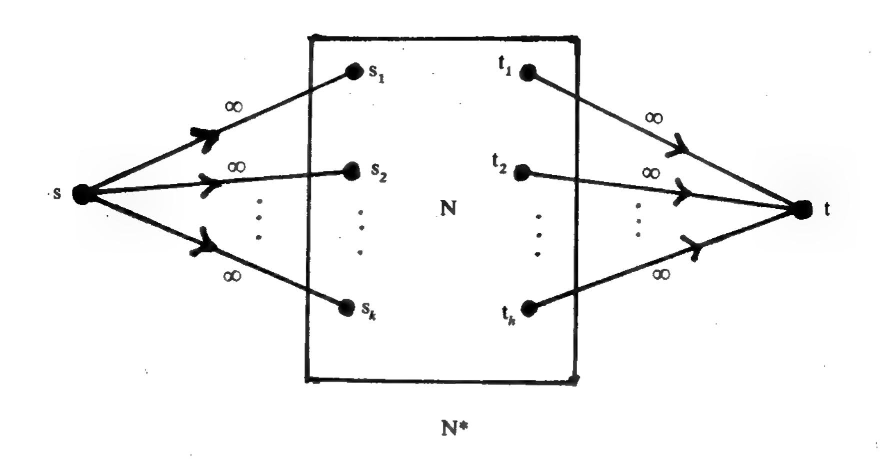
يطلق احياناً على المبرهنة (3 – 6) صيغة الحافات الموجهة لمبرهنة منجر (Menger's theorem) . كما يطلق على المبرهنة (4 – 6) الآتية صيغة الحافات لمبرهنة منجر .

مبرهنة (4 – 6) : اكبر عدد من الدروب البسيطة بين رأسين s و t والمنفصلة الحافات في بيان غيرموجه G يساوي عدد الحافات في مجموعة قاطعة – $[s;t]$ صغرى .

البرهان : ليكن D بيانا موجها رؤوسه هي رؤوس G . ولكل حافة $[x, y]$ في G نرسم حافتين موجهتين (x, y) و (y, x) في D . واضح ان كل درب موجه بسيط P من s الى t في D يقابل درباً بسيطا واحدا فقط بين s و t . وبنفس رؤوس P . في G ؛ والعكس بالعكس . كما ان كل مجموعة قاطعة – $(s;t)$ في D تقابل مجموعة قاطعة $[s; t]$ بنفس عدد الحافات . في G ؛ والعكس بالعكس . وعليه استنادا الى المبرهنة (3 – 6) ، فان أكبر عدد من الدروب البسيطة بين الرأسين s و t في G والمنفصلة الحافات يساوي عدد الحافات في مجموعة قاطعة – $[s, t]$ صغرى . ■

بالرغم من افتراضنا ان شبكات السيول تحتوي على مصدر واحد ومصب واحد فقط ، فانه يمكننا معالجة شبكات السيول التي تحتوي على عدد من المصادر وعدد من المصبات ، مع السماح للسيل بالجريان من أي مصدر من هذه المصادر الى أي مصب من هذه المصبات . فاذا كانت N شبكة سيول فيها المصادر $s_1, s_2, \ldots, s_k$ والمصبات $t_1, t_2, \ldots, t_h$ ، فيمكننا ان ننشيء شبكة جديدة N^* باضافة رأس s ، واعتباره مصدرا ، واضافة رأس آخر t ، واعتباره مصبا للشبكة N^* ، مع اضافة حافات موجهة من s الى كل من $s_1, s_2, \ldots s_k$ واضافة حافة موجهة من كل من المصبات $t_1, t_2, \ldots, t_h$ الى t ، واعطاء سعة ∞ الى كل من هذه الحافات المضافة [انظر الشكل (22 – 6)] . عندئذ ، نلاحظ ان اي سيل اعظمي من s الى t في N^* هو سيل أعظمي من المصادر $s_1, s_2, \ldots, s_k$ الى المصبات $t_1, t_2, \ldots, t_h$ في الشبكة N ، والعكس بالعكس .

كما ان أية قاطعة أصغرية ، بالنسبة الى s و t ، في N^* هي قاطعة أصغرية في N تقطع كل الدروب الموجهة من أي مصدر الى أي مصب .



شكل (6 – 22)

أن ماذكرناه في هذا البند عن شبكات السيول هو جزء يسير مما هو معروف عن هذا الموضوع ويمكن للقارىء الراغب الاطلاع على المزيد في المصدر [4] .

تمارين (6 – 5)

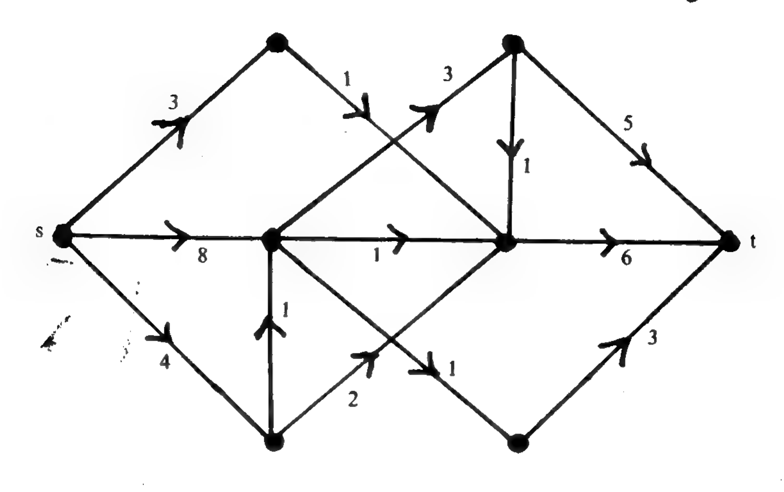
(1) جد سيلاً أعظميا للشبكة المعطاة في الشكل (6 – 18) . ثم اذكر القاطعة الاصغرية المقابلة للسيل الإعظمي الذي وجدته .

(2) جد سيلاً أعظمياً للشبكة المعطاة في الشكل (6 – 23) واثبت أنه يحقق مبرهنة السيل الاعظمي والقاطعة الاصغرية.

(3) إثبت أن ϕ سيل أعظمي اذا واذا فقط لايوجد درب ازدياد السيل في الشبكة N بالنسبة لـ ϕ

(4) اثبت أن قاطعة $(X, \bar{X})$ في شبكة N تكون اصغرية اذا واذا فقط كل سيل أعظمي ϕ يُشبع كل الحافات الموجهة من رأس في X الى رأس

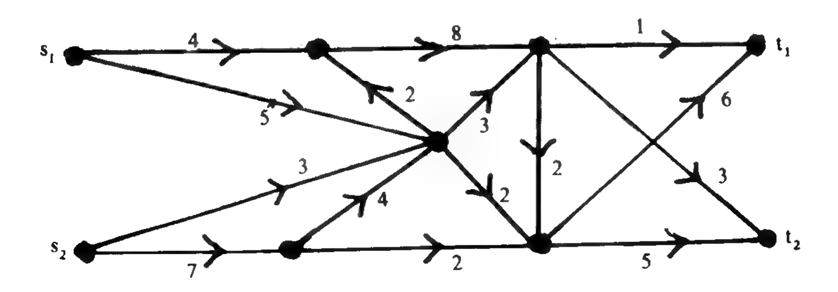
في $\bar{X}$ ؛ بينما كل الحافات الموجهة من رأس في $\bar{X}$ الى رأس في X تكون عديمة السيل بالنسبة الى ϕ .



شكل (6 - 23)

(5) جد كل الدروب البسيطة الموجهة من s الى t والمنفصلة الحافات للبيان الموجه المعطى في الشكل (6 - 23) . مع اهمال سعات حافاته .

(6) جد سيلاً اعظمياً للشبكة المعطاة في الشكل (6 - 24) وهي التي فيها مصدران s_1 , s_2 ومصبات t_1 , t_2 . علما بأنه يسمح للسيل بالجريان من اي من المصدرين الى اي مصب من المصبين . بعد ذلك . اذكر القاطعة الاصغرية التي تفصل s_1 , s_2 عن t_1 , t_2 والمقابلة للسيل الأعظمي الـذي وجدتـه.



شكل (6 - 24)

(6 – 6) تحليل الشبكات الكهربائية
(Analysis of Electrical Networks)

نشرح في هذا البند كيفية استخدام البيانات الموجهة لاستنباط معلومات اساسية عن مجمل شبكة كهربائية عندما تتوفر لدينا معلومات عن عناصرها (مركباتها) وعن طريقة ارتباط تلك العناصر فيما بينها .

تتألف الشبكة الكهربائية التي نبحثها من عناصر ذات طرفين . وهذه العناصر هي : مقاومات (resistors) ، ومتسعات (capacitors) ومحثات (inductors) ومولدات فولتية أوتيارية (voltage or current generators) . لكل من هذه العناصر متغيران هما التيار (the current) والفولتية (the voltage) . ولكل منها معادلة دستورية تربط الفولتية مع التيار. في واقع الحال ، كل من التيار والفولتية دالة للزمن t حقيقية القيمة .

نرمز للشبكة الكهربائية بالحرف N ولعناصرها بـ $E_1 , E_2 , \ldots , E_m$ كما نرمز لمتغير تيار العنصر E_k بـ i_k ، ولمتغير فولتيته بـ v_k . تعرف المعادلات الدستورية لعناصر N كالاتي :

اذا كان E_k مقاومة $\qquad v_k = R_k i_k$

اذا كان E_k محثاً $\qquad v_k = L_k \dfrac{d}{dt} i_k$

اذا كان E_k متسعاً $\qquad v_k = C_k \displaystyle\int_{t_0}^{t} i_k \, dt$

اذا كان E_k مولداً للفولتية $\qquad v_k = f_k (t)$

اذا كان E_k مولداً للتيار $\qquad i_k = g_k (t)$

علماً بان R_k , L_k , C_k ثوابت

يمكننا تمثيل الشبكة الكهربائية كبيان موجه حافاته الموجهة هي عناصر N ورؤوسه هي نقاط ارتباط (junction points) تلك العناصر. كما تقرن كل حافة موجهة بمتغير التيار ومتغير الفولتية للعنصر الذي تمثله . يمكن اختيار اتجاه الحافات للبيان الذي يمثل N كيفياً . على أن تبقى تلك الاتجاهات دون تغيير لحين انتهاء تحليل الشبكة الكهربائية . يزودنا هذا التمثيل بوصف مناسب لتركيب الشبكة الكهربائية . الميزة الجوهرية لمتغيرات التيار هي أنها تحقق الفرضية المعروفة بقانون كرشوف (Kirchhoff law) للتيار. والتي تنص على

فرضية الرؤوس (قانون كرشوف للتيار) :

لكل رأس u ، يكون المجموع الجبري لمتغيرات التيار المقترنة بالحافات الموجهة الواقعة على u صفراً »

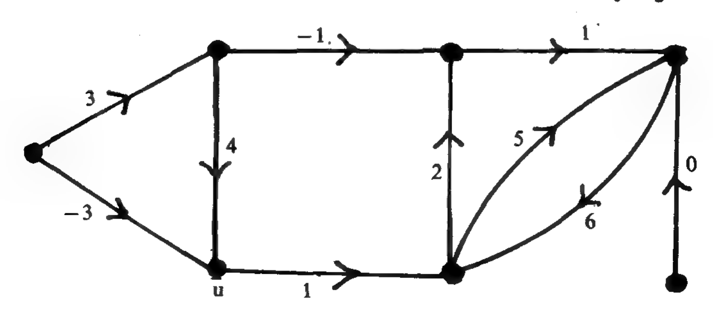
يُقصد بالمجموع الجبري مايأتي : يضاف متغير التيار اذا كانت الحافة الموجهة المقترن بها خارجة من الرأس u ، ويطرح اذا كانت داخلة اليه .

فمثلاً ، في الشكل (6 – 25) تتحقق هذه الفرضية عند الرأس u ، لان

$$1 - (-3) - 4 = 0 .$$

كما يمكن التأكد من أنها تتحقق عند كل رأس من الرؤوس الباقية في هذا البيان.

لاحظ أن الاشارة السالبة لقيمة التيار تدل على أنه يمر بالاتجاه المعاكس لاتجاه الحافة المقترن بها .



شكل (6 – 25)

المتغيرات الفولتية تحقق أيضاً فرضية تعرف بقانون كرشوف للفولتية . وهي التي تنص على

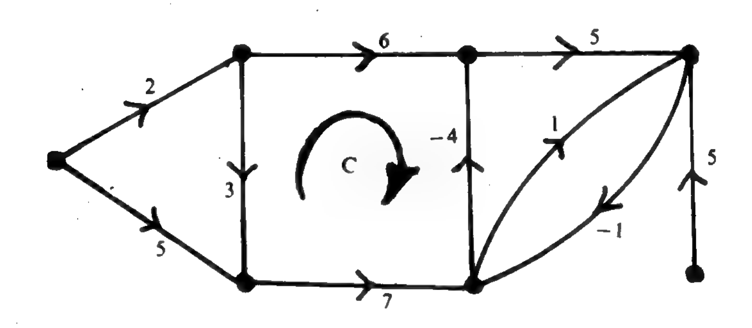
فرضية الدارات (قانون كرشوف للفولتية) :

« لكل دارة بسيطة . يكون المجموع الجبري لمتغيرات الفولتية المقترنة بالحافات الموجهة لتلك الدارة صفراً.»

في هذه الحالة . نفترض أن لكل دارة بسيطة اتجاها معيناً بالاسلوب الذي سبق أن ذكرناه في البند (3 - 4) وعندئذ . يضاف متغير الفولتية اذا اتفق اتجاه الحافة الموجهة المقترن بها مع اتجاه الدارة . ويطرح اذا كان اتجاه الحافة معاكساً لاتجاه الدارة . فمثلاً . في الشكل (6 - 26) تتحقق هذه الفرضية بالنسبة للدارة البسيطة C . لان

$$6-(-4)-7-3=0.$$

كما يمكن التأكد من أنها تتحقق نسبة لكل دارة بسيطة في ... البيان .



شكل (6 - 26)

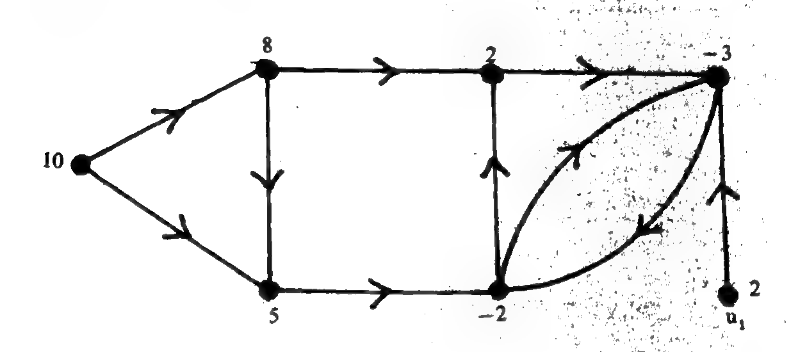
سنفرض أن الشبكة الكهربائية متصلة . أي أن البيان الموجه الذي يمثلها هو بيان متصل .

يمكن وضع فرضية الدارات بصيغة اخرى مكافئة لها . وهي : «اذا كان u_1 رأساً معيناً . وكان u_i أي رأس آخر . فان المجموع الجبري لمتغيرات الفولتية المقترنة بالحافات الموجهة لأي درب بسيط من u_1 الى u_i (أي . نقرن بالدرب اتجاهاً من u_1 الى u_i) لايعتمد على الدرب الذي أخترناه .» استناداً الى هذه الصيغة لفرضية الدارات . يمكننا تعيين مقدار لكل رأس u_i . كما هو مبين فيما يأتي :

نعين مقداراً كيفياً، S_1 ، للرأس u_1 ، وهو الذي نعتبره المصدر، واستناداً الى u_1 نعين لكل رأس آخر، u_i ، المقدار

$$S_i = S_1 - K_i .$$

علماً أن K_i هو المجموع الجبري للمتغيرات الفولتية المقترنة بالحافات الموجهة لأي درب من u_1 الى u_i . في واقع الامر ، تعتبر القيمة S_i جهداً لـ u_i نسبة الى جهد المصدر u_1 . وعليه ، فان قيم المتغيرات الفولتية هي فروق في الجهد الكهربائي . فمثلاً ، الاعداد المقترنة برؤوس البيان الموجه المبين في الشكل (6 – 27) تمثل جهود تلك الرؤوس للبيان المعطى في الشكل (6 – 26) نسبة الى المصدر u_1 ، بافتراض أن جهد u_1 هو 2 .



شكل (6 – 27)

تتكون طريقة استنباط معادلات عامة تصف مجمل الشبكة الكهربائية N (من المعادلات الدستورية ومن تركيب N) من خطوتين اساسيتين .

الخطوة الاولى : استخدام فرضيتي الرؤوس والدارات لاختزال متغيرات التيار (أو متغيرات الفولتية) الى أصغر مجموعة مستقلة من المتغيرات بحيث يمكن التعبير عن كافة المتغيرات بدلالتها .

الخطوة الثانية : استعمال المعادلات الدستورية لعناصر N لاجل التوصل الى علاقة متبادلة بين متغيرات التيار ومتغيرات الفولتية .

نبدأ الان بالخطوة الاولى .

لتكن B مصفوفة الوقوع للبيان الموجه D الذي يمثل N ، ولتكن

$$I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_m \end{bmatrix}$$

عند ئذ يمكن التعبير عن فرضية الرؤوس بالصيغة المصفوفية

$$\bar{B}I = O, \qquad \dots (1)$$

علماً ان m هو عدد حافات D وان $\bar{O}$ مصفوفية عمودية صفرية سعتها $m \times 1$.

بما ان مرتبة $\bar{B}$ هي نفس مرتبة مصفوفة المجموعات القاطعة $\bar{K}$ [بموجب المبرهنتين (1 - 2) و (3 - 13)] ، وبما ان أسطر $\bar{B}$ هي تشكيلات خطية لاسطر $\bar{K}$ ، فان فضاء المتجهات المتولد باسطر $\bar{B}$ هو ذاته فضاء المتجهات المتولد باسطر $\bar{K}$. ولذلك ، فان اسطر $\bar{K}$ هي تشكيلات خطية لاسطر $\bar{B}$. وهكذا فان العلاقة (1) تؤدي الى

$$\bar{K}\, I = \bar{O}. \qquad \dots (2)$$

لتكن T أية شجره مولدة للبيان D . باستعمال رموز ومفاهيم البند (3 - 4) ، يمكننا كتابة مصفوفة المجموعات القاطعة الاساسية ، $\bar{K}_f$ ، ومصفوفة الدارات الاساسية ، $\bar{C}_f$ نسبة للشجرة T ، بالصيغة الآتية :

$$\bar{K}_f = [\, \bar{K}_{f11} \quad U_{n-1} \,],$$

$$\bar{C}_f = [\, U_{m-n+1} \quad \bar{C}_{f12} \,].$$

والان ، نجزىء مصفوفة التيار ، I ، وفقاً لتجزئة اعمدة كل من K_f و $\bar{C}_f$ ، اي ان

$$I = \begin{bmatrix} I_c \\ I_b \end{bmatrix},$$

علماً ان I_c تمثل تيارات اوتار T، وان I_b تمثل تيارات اغصانها .

من العلاقة (2) ، نجد ان فرضية الرؤوس تؤدي الى

$$[\bar{K}_{f11} \quad U_{n-1}] \begin{bmatrix} I_c \\ I_b \end{bmatrix} = \bar{O}.$$

ومنها نتوصل الى

$$I_b = -\bar{K}_{f11} I_c = \bar{C}'_{f12} I_c, \qquad (3)$$

وذلك بموجب (3 − 3).

وهكذا ، يمكننا التعبير عن تيارات الاغصان بدلالة تيارات الاوتار ، اي ان معرفة تيارات الاوتار يكفي لتعيين تيارات الاغصان بالاستعانة بـ $\bar{C}'_{f12}$ التي يمكن كتابتها مباشرة من البيان D .

وبالمثل ، فان فرضية الدارات تنص على

$$\bar{C}\, V = \bar{O},$$

علماً ان $\bar{C}$ هي مصفوفة الدارات للبيان D، وان V هي المصفوفة العمودية التي تمثل متغيرات الفولتية ، اي ان

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

ولذلك فان

$$\bar{C}_f\, V = \bar{O}. \qquad (4)$$

وبتجزئة V كما اجرينا لـ I ، أي

$$V = \begin{bmatrix} V_c \\ V_b \end{bmatrix}$$

علماً ان V_c تمثل متغيرات الفولتية لاوتار الشجرة المولدة T ، وان V_b تمثل متغيرات الفولتية لاغصانها .

من العلاقة (4) . نجد ان فرضية الدارات تؤدي الى

$$[\, U_{m-n-1} \; \bar{C}_{f12} \,] \begin{bmatrix} V_c \\ V_b \end{bmatrix} = \bar{O} ,$$

اي ان

$$V_c + C_{f12} V_b = \bar{O} .$$

وهكذا . بموجب العلاقه(3 − 3) ، نتوصل الى

$$V_c = - \bar{C}_{f12} V_b = \bar{K}'_{f11} V_b . \quad \ldots\ldots (5)$$

أي ، يمكن التعبير عن متغيرات الفولتية للاوتار بدلالة متغيرات الفولتية لاغصان الشجرة المولدة T.

إن تطبيق العلاقتين (3) , (5) يشكل الخطوة الاولى في تحليل الشبكة الكهربائية ، وهي اختزال عدد متغيرات التيار ومتغيرات الفولتية التي يجب معالجتها الى أقل عدد ممكن. بالطبع إن إيجاد هذه المتغيرات ، لكل من الفولتية والتيار ، يعتمد على الشجرة المولدة التي نختارها .

نشرح فيما يأتي الخطوة الثانية من تحليل الشبكة الكهربائية.

من المناسب استعمال صيغة المصفوفات للتعبير عن المعادلات الدستورية لعناصر الشبكة الكهربائية.

فعندما لاتحتوي N على مولدات للتيار ، يمكننا أن نعبر عن متغيرات الفولتية بدلالة متغيرات التيار ، أي أن

$$V = Z I + V_g , \quad \ldots\ldots (5-6)$$

علماً أن Z هي مصفوفة قطرية بسعة $m \times m$ ، فيها العنصر في الموقع (k,k) هو R_k إن كان E_k مقاومة ، $L_k \frac{d}{dt}$ إن كان E_k ، محثاً ، $C_k \int_{t_0}^{t} dt$ ان كان متسعاً ، وصفراً إن كان E_k مولد فولتية . اما V_g فهو مصفوفة عمودية عنصرها في السطر k هو $f_k(t)$ إن كان العنصر E_k مولد فولتية ، ويكون صفراً فيما عدا ذلك (أي عندما يكون العنصر غير مولد − passive) . يطلق على العلاقة (6 − 5) تحويلات العقد (node transformations) .

وعندما لاتحتوي N على مولدات للفولتية ، فيمكننا ان نعبر عن متغيرات التيار بدلالة متغيرات الفولتية ، أي ان

$$I = YV + I_g \qquad (6-6)$$

علماً ان Y هي مصفوفة قطرية بسعة $m \times m$ فيها العنصر في الموقع (k, k) هـو $1/R_k$ ان كان E_k مقاومة ، $(1/L_k)\int_{t_0}^{t} dt$ ان كان E_k محثاً، $(1/C_k)\frac{d}{dt}$ إن كان E_k متسعاً ، وصفراً إن كان E_k مولد تيار . أما I_g فهو مصفوفة عمودية عنصرها في السطر k هو $g_k(t)$ عندما يكون E_k مولد التيار، ويكون صفراً فيما عدا ذلك . يطلق على المعادلة (6 – 6) تحويلات اللفات (loop trans formations) .

في تحليل العقد (node analysis) للشبكات الكهربائية ، نستعمل المعادلة (6– 5) مع العلاقة (3) فنتوصل الى

$$V = Z\begin{bmatrix} I_c \\ I_b \end{bmatrix} + \underline{V_g} = Z\begin{bmatrix} I_c \\ \bar{C}'_{f12}\, I_c \end{bmatrix} + V_g .$$

وهكذا ، نستنتج أن

$$V = Z\bar{C}'_f I_c + V_g .$$

وبضرب الطرفين من اليسار بـ C_f ، ينتج

$$C_f V = C_f Z C_f I_c + C_f V_g$$

وباستعمال العلاقة (4) ، نتوصل الى

$$(C_f Z C_f) I_c = -C_f V_g) \qquad \ldots (7-6)$$

والتي فيها المجاهيل هي متغيرات تيارات الاوتار فقط . واضح أن (6 – 7) هي معادلات تفاضلية – تكاملية (integro–differential equations) ، ويستعمل عادة تحويل لابلاس لاجل تحويلها الى جملة معادلات جبرية خطية مجاهيلها هي تحويلات لابلاس لتيارات الاوتار . وبحلها نحصل على تيارات الاوتار، ثم باستعمال العلاقة (3) نحصل على تيارات الاغصان ، وبذلك يتم تحليل الشبكة الكهربائية . ولمعرفة المزيد عن هذا الموضوع ، يمكن للقارىء الاطلاع على المصدرين [8 , 10] .

وفي تحليل اللفات (loop analysis) للشبكات الكهربائية ، نستعمل المعادلة (6–6) مع العلاقة (5) فنتوصل الى

$$I = Y \begin{bmatrix} V_c \\ V_b \end{bmatrix} + I_g = Y \begin{bmatrix} \bar{K}'_{f11} & V_b \\ & V_b \end{bmatrix} + I_g$$

وهكذا .

$$I = Y \bar{K}'_f V_b + I_g .$$

وبضرب الطرفين من اليسار بـ $\bar{K}_f$ ، ينتج

$$\bar{K}_f I = (\bar{K}_f Y \bar{K}'_f) V_b + \bar{K}_f I_g$$

وباستعمال العلاقة (2) ، نتوصل الى

$$(\bar{K}_f Y \bar{K}'_f) V_b = - \bar{K}_f I_g \quad \ldots (8-6)$$

والتي فيها المجاهيل هي متغيرات الفولتية للاغصان فقط . وبحلها واستعمال العلاقة (5) نحصل على متغيرات الفولتية لكافة عناصر الشبكة الكهربائية .

الفصل السابع

تطبيقات اخرى على مبرهنة هول

نذكر في هذا الفصل القصير بعض استخدامات مبرهنة هول في مواضيع اخرى في لرياضيات . كنظرية المستعرض والمستطيلات اللاتينية.

(7 - 1) نظرية المستعرض (Transversal Theory) :

اذا كانت E مجموعة منتهية غير خالية . وكانت

$$S = (S_1 . S_2 ..... S_m)$$

عائلة من مجموعات جزئية غير خالية – لايشترط أن تكون مختلفة – للمجموعة E . فان مستعرض S هو مجموعة T مكونة من m من عناصر E المختلفة بحيث إن :

(أ) كل عنصر في T ينتمي الى إحدى المجموعات الجزئية $S_1 . S_2 ..... S_m$

(ب) يوجد في T عنصر واحد على الاقل من كل من هذه المجموعات الجزئية.

واضح أن مسألة الزواج ماهي الا مثال في نظرية المستعرض .ومثل آخر. تأمل المجموعة

$$E = \{ 1.3. 5. 7. 9. 11 \} .$$

ولتكن

$$S_1 = \{ 1.5 \} . S_2 = S_3 = \{ 3. 5. 7 \} . S_4 = \{5\}$$
$$S_5 = \{1\} . S_6 = \{ 3.9 \} .$$

تلاحظ عدم وجود ستة عناصر مختلفة بحيث أن كل عنصر ينتمي الى احدى هذه المجموعات الجزئية الست ، وبذلك لايوجد للعائلة

$$S = (S_1 . S_2 ..... S_6)$$

مستعرض . ولكن . اذا أخذنا العائلة الجزئية $(S_1 . S_2 . S_3 . S_4 . S_6)$ من العائلة S . نجد أن لها مستعرض $\{ 1.3 5. 7. 9 \}$.

يطلق عادة على مستعرض العائلة الجزئية من S إسم مستعرض جزئي (partial transversal) . في واقع الحال . كل مجموعة جزئية من مستعرض S هي مستعرض جزئي لـ S .

من الطبيعي أن يسأل عن الشروط التي تحققها عائلة S لمجموعات جزئية بحيث يكون لها مستعرض . إن الصلة بين هذه المسألة ومسألة الزواج واضحة جداً ، وذلك بأخذ E مجموعة كافة البنات ، وأخذ S_i مجموعة البنات اللاتي يعرفهن الابن b_i . وبذلك فان مبرهنة هول تزودنا بشرط ضروري وكافٍ لوجود مستعرض لـ S. وهكذا ، يمكننا اعادة صياغة مبرهنة هول باستعمال مفاهيم نظرية المستعرض كالآتي :

«لتكن E مجموعة منتهية غير خالية ، ولتكن

$$S = (S_1 , S_2 , \ldots , S_m)$$

عائلة مجموعات جزئية من E غير خالية ، عندئذ يكون لـ S مستعرض اذا واذا فقط مجموعة اتحاد أي k من المجموعات الجزئية S_i تحتوي على الاقل على k من العناصر، لكل

$$1 \leqq k \leqq m$$

(7– 2) المستطيلات اللاتينية (Latin Rectangles) :

من الاستخدامات الاخرى لمبرهنة هول استعمالها في المستطيلات اللاتينية.

يقال لمصفوفة $M = [m_{ij}]$ بسعة $m \times n$ إنها <u>مستطيل لاتيني $m \times n$</u> اذا كان :

(أ) عناصر M اعداد صحيحة . وان $1 \leqq m_{ij} \leqq n$.

(ب) لايوجد عنصران متساويان يقعان في نفس السطر أو في نفس العمود . أي أن عناصر كل سطر (عمود) تكون مختلفة .

بما ان

$$1 \leqq m_{ij} \leqq n .$$

فان الشرط (ب) يؤدي الى $m \leqq n$

اذا كان $m = n$. فعندئذ يطلق على المستطيل اللاتيني مربع لاتيني (latin square)

<u>مثال</u> : المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مستطيل لاتيني 6×4 . وان المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

هي مربع لاتيني 4×4.

يعترضنا الآن السؤال الآتي : «اذا كان لدينا مستطيل لاتيني $m\times n$ ، $m<n$. فهل يمكننا ان نضيف اليه $(n-m)$ من الاسطر الجديدة بحيث ينتج مربع لاتيني $n \times n$؟ » المبرهنة الآتية تبين ان ذلك ممكناً دائماً .

مبرهنة $(7-1)$: ليكن M مستطيلا لاتينياً $m\times n$ مع $m<n$. عندئذيمكن توسيع M الى مربع لاتيني $n \times n$ باضافة $(n-m)$ من الاسطر الجديدة .

البرهان : سنبرهن على انه يمكن توسيع M الى مستطيل لاتيني $(m+1)\times n$ باضافة سطر جديد الى M.

لتكن

$$E = \{1.2 \ldots\ldots n\} . S = (S_1 . S_2 \ldots\ldots S_n)$$

علماً أنَّ . S_i هي مجموعة كل عناصر E التي لاتنتمي الى العمود ذي رقم i في M . سنبرهن على وجود مستعرض لـ S .

بموجب مبرهنة هول . يكفي أن نبرهن على أن مجموعة الاتحاد U لاي k من المجموعات الجزئية S_i يحتوي على مالايقل عن k من عناصر E . في

واقع الامر، كل S_i تحتوي على $(n - m)$ من العناصر المختلفة. وبذلك فان عائلة اتحاد k من المجموعات الجزئية تحتوي على $k(n - m)$ من العناصر (بسبب احتساب تكرار العناصر). ولما كانت عناصر أي سطر في M مختلفة. فانه لايوجد عنصر في عائلة الاتحاد هذه متكرر اكثر من $(n - m)$ من المرات. وهكذا فان العناصر في مجموعة الاتحاد U لايقل عن k. وبهذا. فانه يوجد مستعرض لـ S. يضاف كسطر برقم $m + 1$ الى المصفوفة M. فنحصل على مستطيل لاتيني $(m+1) \times n$.

وهكذا، يمكننا توسيع M الى مربع لاتيني $n \times n$ وذلك بتكرار تطبيق الاسلوب الذي شرحناه في أعلاه $(n - m)$ من المرات مبتدئين بـ M. وباضافة سطر جديد واحد في كل مرة. ■

(7 - 3) مبرهنة كونيك - اجيرفاري

هنالك استخدام آخر لمبرهنة هول نشرحه فيما يأتي. لتكن $S = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ عائلة من مجموعات جزئية غير خالية لمجموعة $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. مصفوفة الوقوع للعائلة S تعرف بانها مصفوفة $A = [a_{ij}]$ بسعة $m \times n$ بحيث ان $a_{ij} = 1$ اذا كان $e_j \in S_i$. وفيما عدا ذلك فان $a_{ij} = 0$. يطلق على هكذا مصفوفة. وهي التي عناصرها 0 أو 1 مصفوفة - $(0,1)$.

يعرف الرمز $R(A)$. وهو الذي يطلق عليه مرتبة A، بانه اكبر عدد من عناصر A التي قيمة كل منها 1 والتي لايقع اي اثنين منها في نفس السطر او في نفس العمود. عندئذ. يكون لـ S مستعرض اذا واذا فقط كان $R(A) = m$. اضافة الى ذلك. فان $R(A)$ هو بالضبط عدد العناصر في أوسع مستعرض جزئي ممكن لـ S. والآن نستخدم مبرهنة هول لاثبات المبرهنة الآتية المعروفة بمبرهنة كونيك - اجيرفاري (König - Egervary theorew).

مبرهنة (2-7) - مبرهنة كونيك - اجيرفاري (سنة 1931):

اذا كانت A مصفوفة - $(0,1)$. فان $R(A)$ هو العدد الاصغر، μ. لاسطر واعمدة A التي تحتوي سوية على كل عناصر A غير الصفرية.

البرهان: واضح ان

$$R(A) \leqq \mu .$$

لاثبات ان

$$\mu \leqq R(A)$$

يمكننا ان نفرض . بدون تخصيص . ان كل العناصر غير الصفرية في A محتواة في r من الاسطر و s من الاعمدة . حيث ان

$$\mu = r + s .$$

يمكننا ترتيب الاسطر والاعمدة بحيث تصبح A بالصيغة

$$A = \begin{bmatrix} M_1 & \vdots & M_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{O} & \vdots & M_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r \\ \\ \} m - r \end{matrix}$$

(حيث تمثل $n - s$ و s عدد أعمدة كل جزء)

حيث ان $\bar{O}$ مصفوفة صفرية بسعة $(m - r) \times (n - s)$.

والآن . نعرف S_i . حيث $1 \leqq i \leqq r$. بأنها مجموعة الاعداد الصحيحة بحيث أن $j \leqq n - s$ و $a_{ij} = 1$.

اذا كان اتحاد k من المجموعات S_i يحتوي على t من العناصر . وان $t < k$. فانه يمكن اخذ الاعمدة التي تقابل هذه العناصر مع أعمدة M_2 . ويتبع ذلك وجود k من الاسطر الصفرية في الجزء الباقي من M_1 وهذه تؤخذ مع أسطر O وهكذا يمكننا اعادة تجزئة A . بعد اعادة ترتيب الاسطر والاعمدة . بالصيغة :

$$\begin{bmatrix} M'_1 & \vdots & M'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{O}' & \vdots & M'_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} r - k \\ \\ \} m - (r - k) \end{matrix}$$

(حيث تمثل $n - (s + t)$ و $s + t$ عدد أعمدة كل جزء)

ومنه نستنتج أن هناك $(r+s)-(k - t)$ من الاسطر والاعمدة التي تحتوي سوية على كل العناصر ذات القيمة 1 في A . وهذا يناقض افتراضنا ان

$$\mu = r + s$$

هو العدد الاصغر من الاسطر والاعمدة التي تحتوي سوية على كل العناصر ذات القيمة 1 في A. و لذلك . فان اتحاد أي k من المجموعات S_i يحتوي على ما لايقل عن k من

العناصر . وهكذا ، بموجب مبرهنة هول ، فانه يوجد مستعرض لـ

$$S = (S_1 , S_2 ,..., S_r)$$

وهذا يؤدي الى أن المصفوفة الجزئية M_1 تحتوي على r من العناصر ذات القيمة 1 بحيث لا يقع أي أثنين منهم في نفس السطر أو في نفس العمود . وبالمثل ، نبرهن على أن المصفوفة الجزئية M_3 تحتوي على s من العناصر ذات القيمه 1 بحيث لايقع أي اثنين منها في نفس السطر أو في نفس العمود .

وهكذا ، فان المصفوفة A تحتوي على (r + s) من العناصر ذات القيمة 1 بحيث لايقع أي اثنين منها في نفس السطر أو في نفس العمود . وبذلك ، فان

$$\mu \leqq R(A)$$

وبهذا يتم البرهان

لقد أثبتنا مبرهنة كونيك – اجيرفاري باستخدام مبرهنة هول ، ويمكننا أيضاً أن نثبت [انظر تمرين (6)] مبرهنة هول باستخدام مبرهنة كونيك – اجيرفاري .

تمارين

(1) العوائل في كل من الفروع الآتية مكونة من مجموعات جزئية من المجموعة

$$E = \{ 1,2, 3, 4, 5, 6 \} .$$

عين منها العوائل التي لها مستعرضات :

(a) $(\{2\} , \{ 3, 4 \} , \{ 1, 5\} , \{ 3, 5 \})$;

(b) $(\{1 ,2 \} , \{2\} , \{2,3 \} \{ 1,3 \} \{ 4,5, 6 \})$;

(c) $(\{ 1,2 \} , \{ 3,4 \} , \{ 2,5 \} , \{ 4,5 \} , \{ 3 , 4,6 \} , \{ 1, 5, 6 \})$;

(d) $(\{2\} , \{ 2,3 \} , \{ 1,3 \} , \{ 2,3 \})$.

(2) اذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة E ، وأن S عائلة لمجموعات جزئية غير خالية لـ E . فاثبت انه يوجد مستعرض لـ S يحتوي على A اذا واذا فقط (أ) يوجد لـ S مستعرض . (ب) وأن A هي مستعرض جزئي لـ S .

(3) وسع المستطيل اللاتيني المعطى في المثال الى مربع لاتيني 6×6 .

(4) أ– لتكن C زمرة ضربية منتهية . بين انه يمكن اعتبار جدول ضربها مربعاً لاتينياً .

ب– هل أن المربع اللاتيني

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

يمثل (وفق الكيفية التي سوف تتبعها في -أ-) جدول ضرب زمرة ؟

(5) اثبت أن هنالك على الاقل $(n!(n-1)!\dots(2!)1!)$ مربعاً لاتينياً . $n \times n$. واثبت ان هنالك على الاقل $n!(n-1)!\dots(n-m+1)!$

مستطيلاً لاتينياً $m \times n$. علماً بان $n>m$.

(8*) برهن مبرهنة هول باستخدام مبرهنة كونيك - اجير فاري

المصطلحات العلمية

Abstract - dual	إثنيني مجرد
Activity	فعالية
Adjacency matrix	مصفوفة التجاور
Adjacent	متجاور
Algorithm	خوارزمية
Anti - symmetric	لاتناظري
Arbitrary	كيفي (اختياري)
Arborscence	شجرانية
Articulation point	نقطة مفصل
Automorphism	تشاكل ذاتي
Bipartite graph	بيان ثنائي التجزئة
Bond	آصرة
Branch	غصن
Capacitor	متسع
Capacity	سعة
Chain	درب
Chord	وتر
Chromatic polynomials	حدوديات التلوين
Circuit	دارة
Coforest	تتمة غابة
Coloration	تلوين
Complete graph	بيان تام
Complementary	متمم
Composition	تركيب
Connected	متصل
Connectedness	إتصال
Cotree	تتمة شجرة

Counter example	مثال مناقض (مصاد)
Critical	حرج
Crossing	تقاطع
Cubic graph	بيان تكعيبي
Current	تيار
Curve	منحنٍ
Cut – set	مجموعة قاطعة
Cycle	دارة (أو دورة)
Cyclomatic number	رقم دوراني
Degree	درجة
Demi – degree	شبه درجة
Diameter	قطر
Directed	موجه
Disconnected	غير متصل (منفصل)
Disjoint	منفصل
Distance	مسافة
Dodecahedron	ذو الاثني عشر سطحاً
Dual graph	بيان اثنيني
Duality	اثنينية (ثنوية)
Eccentricity	اختلاف مركزي
Edge	حافة
Embedding	غمر
Event	حدث
Exterior face	وجه خارجي
Face	وجه
Family tree	شجرة العائلة
Finite	منتهي
Flow	سيل
Forest	غابة
Four-color problem	مسألة الالوان الاربعة

Generator	مولد
Genus	جنس
Girth	خصر
Graph	بيان
Handle	مقبض
Hand shaking lemma	مأخوذة المصافحة
Homeomorphic	متكافيء توبولوجياً
Identification	تطابق
Incidence matrix	مصفوفة الوقوع
Incident with	واقع على
Independent	مستقل
Inductor	محث
Infinite	غير منته
Initial vertex	رأس ابتدائي (رأس الابتداء)
Inter change	مناقلة (تحويل داخلي)
Isolated	منعزل
Isomorphic	متشاكل
Isthmus	برزخ
Labelled graph	بيان موسوم
Latin rectangle	مستطيل لاتيني
Lemma	مأخوذة (مصادرة)
Loop	لفة
Map	خارطة
Matching	تزاوج (أو توافق)
Maximal	أعظمي
Measure	قياس
Metric axioms	بديهيات المتر (او البعد)
Minimal	أصغري
Minimal covering	تغطية اصغرية
Multigraph	بيان مضاعف

Multiple edge	حافة مضاعفة
Network	شبكة
Node	عقدة
Non – separable	غير قابل للانفصال
Null – graph	بيان تافه
Octahedron	ثماني السطوح
Order	رتبة
Orientable surface	سطح موجه
Partial	جزئي
Passive	غير فعال (خامل)
Path	درب (او درب موجه)
Planar graph	بيان مستو
Platonic graphs	بيانات أفلاطونية
Polyhedra	متعدد السطوح
Projection	إسقاط
Rank	مرتبة
Reachable	قابل الوصول
Reduced	مختصر
Reducible	قابل الاختزال (الاختصار)
Reference	مصدر
Region	منطقة
Regular	منتظم
Removal	ازالة
Ring	حلقة
Root	جذر
Rooted tree	شجرة جذرية
Saturated	مشبع
Section graph	بيان مقطعي
Self – complementary	متمم ذاتي
Self – dual	اثنيني – ذاتي
Separable	قابل الانفصال

Simple graph	بيان بسيط
Simplex	مبسط
Sink	مصب
Skeleton	هيكل
Slack activity	فعالية متراخية
Source	مصدر أو منبع
Spanning tree	شجرة مولدة
Status	منزلة
Subgraph	بيان جزئي
Surface	سطح
Symmetric	متناظر
Terminal vertex	رأس نهائي (رأس الانتهاء)
Thickness	سمك
Toroidal graph	بيان طري
Torus	طرة
Transformation	تحويل
Transversal	مستعرض
Traversable	قابل الاجتياز
Tree	شجرة
Unavoidable set	مجموعة لاتجنبية
Unbounded face	وجه غير محدود
Undireoted graph	بيان غير موجه
Union	اتحاد
Unsaturated	غير مشبع
Vertex	رأس
Voltage	فولتية
Walk	مسار
Wheel	عجلة

المراجع

(1) Appel, K., and Haken, W. : "Every Planar Map is Four Colorable," Illinois J. Math., Vol.21, (1977).

(2) Berge, C.: "Theory of Graphs and Its Applications," JohnWiley & Sons, Inc., New York, 1962.

(3) Berge, C.: "Graphs and Hypergraphs," North- Holland, London, 1973.

(4) Busacker, R. G., and Saaty, T.L.,: "Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications," Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1965.

(5) Ford, L.R., Jr., and Fulkerson, D.R.: "Flows in Networks, " Princeton University Press, Princeton, N. J., 1962.

(6) Harary, F.: "Graph Theory, " Addison-Wesley, Reading, 1971.

(7) Harary, F., editor : " New Directions in the Theory of Graphs ," Academic Press, New York, 1973.

(8) Kim, W. H., and Chien, R. T. W. : "Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks" , Columbia University Press, New York, 1962.

(9) Maxwell, L. M. & Reed, M. B. : " The Theory of Graphs : A Basis for Network Theory " , Pergamon Press, New York, 1971.

(10) Seshu, S. & Reed, M. B. : " Linear Graphs and Electrical Networks, " Addison -Wesley, Inc. Reading, 1961 .

(11) Ore, O. : " The Four - Color Problem, " Academic Press, New York, 1967.

(12) Ore, O. : " Theory of Graphs, " 3 rd. ed., Am. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. 38, Providence, 1967.

(13) Wilson, R. J. : " Introduction to Graph Theory, " Oliver and Boyd, 1972.